

Distributionen und Sobolevräume
Prof. Dr. Christian Seifert
summer term 2016

Marcel Schaub

3. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	3
1	Der Grundraum $\mathcal{D}(\Omega)$	4
2	Faltung	10
3	Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)'$ der Distributionen	13
4	Träger von Distributionen	16
5	Differentiation und Multiplikation von Distributionen	21
6	Der Grundraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen	24
7	Fourier-Transformation	27
8	Tensorprodukt von Funktionenräumen und Distributionen	31
9	Faltung von Distributinoen	34
10	Fundamentallösungen	38
11	Sobolevräume, Definitionen und erste Eigenschaften	43
12	Zur Geometrie offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$	48
13	Der Sobolev'sche Einbettungssatz	50
14	Kompakte Einbettungen	56
15	Der Spur-Operator	60

0 Einleitung

- (1) Gesucht sei für $\ell > 0$ eine Lösung

$$\begin{aligned} u: [0, \infty) \times [0, \ell] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto u(t, x) \end{aligned}$$

von

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit der Randbedingung, dass $u(0, x)$ ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite $[0, \ell]$ einschließt und $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \ell) = 0$. Diese Gleichung ist klassisch nicht lösbar. Also müssen wir den Ableitungsbegriff verallgemeinern.

- (2) Die “ δ -Funktion”:

$$\delta(x) := \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \, dx = 1$$

Solch eine Funktion $\delta: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gibt es nicht. Eigentlich wollen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) \, dx = \varphi(0) =: T(\varphi)$$

haben. Dann definiert $T: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional.

- (3) Fundamentallösungen von partiellen Differentialgleichungen. Sei $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ geeignet. Gesucht sei eine Lösung $u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zur Poisson-Gleichung $\Delta u = f$. Mit

$$E(x) := -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} \quad x \neq 0$$

gilt $\Delta E(x) = 0$ für all $x \neq 0$, genauer $\Delta E = \delta$. Dann ist $u = E * f$ die gesuchte Lösung.

- (4) Schwache Lösungen partieller Differentialgleichungen: Wie bei 3. betrachten wir $\Delta u = f$. Nimm $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und integriere dagegen:

$$\int \Delta u \varphi = \int f \varphi$$

partielle Integration liefert

$$\int u \Delta \varphi = \int f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Dann nennt man u eine schwache Lösung zu $\Delta u = f$.

1 Der Grundraum $\mathcal{D}(\Omega)$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ bezeichne $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$ die übliche partielle Ableitung. $|\alpha| := \|\alpha\|_{\ell^1}$ ist die Ordnung von α . Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ den Grundraum der Testfunktionen.

1.1 Lemma. (a) $\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein $\mathbb{K}$ -VR.

(b) $\mathcal{D}(\Omega) \neq \{0\}$.

(c) Sei $x \in \Omega$: Dann gibt es $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ mit $\varphi(x) > 0$.

Beweis. Übliche Existenzorgel zu bumpfunctions. □

Später werden wir sehen, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

1.2 Satz (Zerlegung der Eins). Sei $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von Ω . Dann existieren

(1) eine abzählbare, lokal endliche Überdeckung $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Ω , d.h. $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ und für alle $x \in \Omega$ gibt es eine offene Umgebung U von x , sodass $V_i \cap U \neq \emptyset$ nur für endliche viele $i \in \mathbb{N}$ gilt. Jedes der $\bar{V}_i$ ist kompakt und es gibt $\iota \in J$ mit $\bar{V}_i \subseteq U_\iota$.

(2) eine Folge $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit

- $\text{supp } \varphi_i \subseteq V_i$
- $\varphi_i \geq 0$
- $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$. Nur endlich viele Terme sind ungleich null.

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\Omega_m := \left\{ x \in \Omega : |x| < m, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m} \right\}$$

Dann ist Ω_m offen und

$$\bar{\Omega}_m = \left\{ x \in \Omega : |x| \leq m, \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m} \right\} \subseteq \Omega_{m+1}$$

kompakt und es gilt $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m = \Omega$. Sei $\Omega_0 := \emptyset$ und $\Omega_{-1} := \emptyset$ und für $m \in \mathbb{N}$ sei $K_m := \bar{\Omega}_m \setminus \Omega_{m-1}$. Für $x \in K_m$ gibt es $\iota_x \in J$ mit $x \in U_{\iota_x}$, $\delta_x > 0$, sodass

$$\bar{B}_{\delta_x}(x) \subseteq U_{\iota_x} \cap (\Omega_{m+1} \setminus \bar{\Omega}_{m-2})$$

Zur offenen Überdeckung $\{B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)\}_{x \in K_m}$ von K_m gibt es eine endliche Teilüberdeckung zu Punkten $x_{m,1}, \dots, x_{m,j_m}$. Setze

$$V_{m,j} := B_{\delta_{x_{m,j}}}(x_{m,j})$$

Dann erfüllt $(V_{m,j})_{j=1, \dots, j_m, m \in \mathbb{N}}$ die Bedingung in (1). Wähle $\tilde{\varphi}_{m,j} \in \mathcal{D}(\Omega)$ wie in Lemma 1.1, $\tilde{\varphi}_{m,j} \geq 0$, $\text{supp } \tilde{\varphi}_{m,j} \subseteq \bar{B}_{\frac{1}{2}\delta_{x_{m,j}}}(x_{m,j}) \subseteq V_{m,j}$. Setze $\tilde{\varphi} := \sum_{j=1, \dots, j_m, m \in \mathbb{N}} \tilde{\varphi}_{m,j} \in C^\infty(\Omega)$.

Zu $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq \Omega$ von x , sodass $\tilde{\varphi}(y) = \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{j=1}^{j_m} \tilde{\varphi}_{m,j}(y)$ (lokal endliche Summe) und es gilt $\tilde{\varphi}(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$, denn

$$\{x \in \Omega : \tilde{\varphi}_{m,j}(x) > 0\} = B_{\frac{1}{2}\delta_{x_{m,j}}}(x_{m,j})$$

mit $\varphi_{m,j} := \frac{\tilde{\varphi}_{m,j}}{\tilde{\varphi}}$ für alle $j = 1, \dots, j_m$ und $m \in \mathbb{N}$ folgt (2). □

1.3 Korollar. Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann gibt es $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ auf einer Umgebung von K .

Beweis. Es gibt $K \subseteq K' \subseteq \Omega$ mit K' kompakt und $K \subseteq \overset{\circ}{K}'$. Zur Überdeckung (Ω) von Ω wähle eine untergeordnete Zerlegung der Eins gemäß Satz 1.2, mit $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Setze $\varphi := \sum_{i \in \mathbb{N}, V_i \cap K' \neq \emptyset} \varphi_i$. $\square$

1.4 Lemma. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Dann ist $j: \mathcal{D}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_2)$,

$$j(\varphi)(x) := \begin{cases} \varphi(x) & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

eine Einbettung.

Beweis. Klar. $\square$

Bemerkung. Lemma 1.4 liefert eine Monotonie von $\mathcal{D}(\Omega)$ bzgl. Ω .

Wir kommen nun zur Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Sei $(\overline{\Omega}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ die Standardausschöpfung von Ω . Für $m \in \mathbb{N}$ betrachte die Halbnormen $p_m: C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p_m(\varphi) := \max\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in \overline{\Omega}_m, |\alpha| \leq m\}$$

1.5 Lemma. Für $m \in \mathbb{N}$ ist p_m eine Halbnorm auf $\mathcal{D}(\Omega)$.

Beweis. Für $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $p_m(\lambda \varphi_1) = |\lambda| p_m(\varphi_1)$ und

$$p_m(\varphi_1 + \varphi_2) \leq p_m(\varphi_1) + p_m(\varphi_2)$$

nachdem entsprechende Ungleichungen für den Betrag und die Maximumsnorm gelten. $\square$

1.6 Lemma. Die Familie $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ trennt die Punkte in $C^\infty(\Omega)$, d.h. für $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega)$ mit $\varphi \neq \psi$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodass $p_m(\varphi - \psi) \neq 0$.

Beweis. Es gibt ein $x \in \Omega$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in \overline{\Omega}_m$. Dann gilt $p_m(\varphi - \psi) \geq |\varphi(x) - \psi(x)| > 0$. $\square$

1.7 Satz. Sei $d: \Omega^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \min\{p_m(\varphi - \psi), 1\}$$

Dann ist d eine Metrik auf $C^\infty(\Omega)$ und $C^\infty(\Omega)$ ist ein Banachraum bzgl. d . Für $K \subseteq \Omega$ kompakt ist

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega), \text{supp } \varphi \subseteq K\}$$

ein abgeschlossener Unterraum.

Beweis. Dreiecksungleichung folgt aus dem bisherigen und Symmetrie ist klar. Sei $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega)$ mit $d(\varphi, \psi) = 0$. Dann sind alle Summanden 0 und Lemma 1.6 liefert $\varphi = \psi$. Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega)$ eine Cauchy-Folge. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist dann $(\varphi_k)_k$ eine Cauchy-Folge bzgl. p_m . Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also ein $k_m \in \mathbb{N}$ sodass

$$p_m(\varphi_k - \varphi_\ell) = \max\{|\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi_\ell(x)| : x \in \overline{\Omega}_m, |\alpha| \leq m\} < \varepsilon$$

für $k, \ell \geq k_m$. Damit existiert $\psi_{m,\alpha} \in C(\overline{\Omega}_m)$ mit $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \psi_{m,\alpha}$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}_m$. Setze nun $\psi_m := \psi_{m,0} \in C^m(\overline{\Omega}_m)$ und es folgt $\partial^\alpha \psi_m = \psi_{m,\alpha}$. Für $m' \in \mathbb{N}$ mit $m \leq m'$ gilt, dass $\overline{\Omega}_m \subseteq \overline{\Omega}_{m'}$ und $\psi_{m'}|_{\overline{\Omega}_m} = \psi_m$. Daher existiert ein $\psi \in C^\infty(\Omega)$ mit $\partial^\alpha \psi|_{\overline{\Omega}_m} = \partial^\alpha \psi_m$ für alle $|\alpha| \leq m$ und $m \in \mathbb{N}$ und

$$d(\varphi_m, \psi) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Für $x \in \Omega$ ist $J_x : C^\infty(\Omega) \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{K}$ stetig. Damit ist

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi(x) = 0, x \in \Omega \setminus K\} = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} J_x^{-1}(0)$$

abgeschlossen. □

Für $K \subseteq \Omega$ kompakt sei $\mathcal{T}_K$ die von der Metrik d auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ induzierte Topologie (vollständig, metrisierbar).

Bemerkung. Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann wird die Topologie $\mathcal{T}_K$ auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ auch von den Normen $\|\cdot\| : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|\varphi\|_m := \max\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq m\}$$

(für m hinreichend groß) erzeugt.

Definition. Sei X ein Vektorraum und $U \subseteq X$. Dann heißt U konvex falls für alle $x, y \in U$ und $\lambda \in (0, 1)$ folgt, dass $(1 - \lambda)x + \lambda y \in U$. U heißt kreisförmig (ausgewogen, balanciert), falls für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$ folgt dass $\lambda U \subseteq U$.

Definition. Sei

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq \mathcal{D}(\Omega) : U \text{ konvex, kreisförmig, } \mathcal{D}_K(\Omega) \cap U \in \mathcal{T}_K \forall K \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$$

und

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{V}} \varphi + U : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \right\}$$

1.8 Satz. $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ mit Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$ (d.h. $\mathcal{T}$ ist die Menge aller Vereinigungen von Translaten von Mengen aus $\mathcal{U}$). $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T})$ ist ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, d.h. $+$ und $\cdot$ sind stetig und $\mathcal{T}$ besitzt eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen.

Beweis. Mit $\mathcal{F} = \emptyset$, $\mathcal{V} = \emptyset$ gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$ und mit $\mathcal{F} = \mathcal{D}(\Omega)$ und $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ folgt, dass $\mathcal{D}(\Omega) \in \mathcal{T}$. Beliebige Vereinigungen sind natürlicherweise in $\mathcal{T}$. Seien $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$, $\varphi \in V_1 \cap V_2$. Wir zeigen, dass es $U_\varphi \in \mathcal{U}$ gibt, sodass $\varphi + U_\varphi \subseteq V_1 \cap V_2$. Dann folgt, dass

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{\varphi \in V_1 \cap V_2} \varphi + U_\varphi \in \mathcal{T}$$

Es gibt $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, sodass $\varphi \in \varphi_i + U_i \subseteq V_i$, $i = 1, 2$. Sei $K := \text{supp } \varphi \cup \text{supp } \varphi_1 \cup \text{supp } \varphi_2$. Dann folgt $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Da $\mathcal{D}_K(\Omega) \cap U_i$ offen in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist, gibt es $\delta_i > 0$ mit $\varphi - \varphi_i \in (1 - \delta_i)U_i$, $i = 1, 2$. Da U_i konvex ist, ist

$$\varphi - \varphi_i + \delta_i U_i \subseteq (1 - \delta_i)U_i + \delta_i U_i = U_i$$

Es folgt, dass $\varphi + \delta_i U_i \subseteq \varphi_i + U_i \subseteq V_i$. Nun setze $U_\varphi := (\delta_1 U_1) \cap (\delta_2 U_2)$. Sei nun $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $U \in \mathcal{U}$. Dann ist

$$\left(\varphi + \frac{1}{2}U\right) + \left(\psi + \frac{1}{2}U\right) = \varphi + \psi + U$$

Damit ist $+$ stetig. Für die Multiplikation seien $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda\varphi - \lambda_0\varphi_0 = \lambda(\varphi - \varphi_0) + (\lambda - \lambda_0)\varphi_0$$

Sei $U \in \mathcal{U}$. Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit $\delta\varphi_0 \in \frac{1}{2}U$. Sei $c := \frac{1}{2(|\lambda_0| + \delta)}$. Da U konvex und kreisförmig ist, gilt für $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\varphi - \varphi_0 \in cU$, dass

$$\lambda\varphi - \lambda_0\varphi_0 = \underbrace{\lambda(\varphi - \varphi_0)}_{\substack{\in cU \\ \in \frac{1}{2}U}} + \underbrace{(\lambda - \lambda_0)\varphi_0}_{\substack{|\cdot| < \delta \\ \in \frac{1}{2}U}} \in U$$

□

1.9 Satz. (a) Sei $U \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ konvex, kreisförmig. Dann ist U offen genau dann wenn $U \in \mathcal{U}$.

(b) Für $K \subseteq \Omega$ kompakt gilt, dass $(\mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{T}_K) = (\mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{T} \cap \mathcal{D}_K(\Omega))$.

(c) Sei $V \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ beschränkt (d.h. für alle Nullumgebungen U gibt es ein $s > 0$, sodass für alle $t \geq s$: $V \subseteq tU$). Dann gibt es ein $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass $V \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$ und

$$\sup_{\varphi \in V} \max\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq m\} < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. (a) $U \in \mathcal{T}$ konvex und kreisförmig. Sei $K \subseteq \Omega$ und $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \cap U$. Nach Satz 1.8 gibt es ein $V_\varphi \in \mathcal{U}$, sodass $\varphi + V_\varphi \subseteq U$. Damit folgt $\varphi + (\mathcal{D}_K(\Omega) \cap V_\varphi) \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega) \cap U$. Da $\varphi + (\mathcal{D}_K(\Omega) \cap V_\varphi)$ offen in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist, folgt

$$\mathcal{D}_K(\Omega) \cap U = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \cap U} (\varphi + \mathcal{D}_K(\Omega) \cap V_\varphi)$$

und damit ist $\mathcal{D}_K(\Omega) \cap U$ offen und daher $U \in \mathcal{U}$. Die andere Richtung ist klar.

(b) $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \subseteq \mathcal{T}_K$ folgt aus (a). Sei $V \in \mathcal{T}_K$. Zu zeigen ist, dass ein $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $V = \mathcal{D}_K(\Omega) \cap U$. Für $\varphi \in V$ gibt es ein $m_\varphi \in \mathbb{N}$ und $\delta_\varphi > 0$, sodass

$$\{\psi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : p_{m_\varphi}(\psi - \varphi) < \delta_\varphi\} \subseteq V$$

Setze

$$U_\varphi := \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : p_{m_\varphi}(\psi) < \delta_\varphi\} \subseteq V$$

Dann ist $U_\varphi \in \mathcal{U}$ und

$$\mathcal{D}_K(\Omega) \cap (\varphi + U_\varphi) = \varphi + (\mathcal{D}_K(\Omega) \cap U_\varphi) \subseteq V$$

Sei $U := \bigcup_{\varphi \in V} (\varphi + U_\varphi)$. Dann ist $U \in \mathcal{T}$ und $V = \mathcal{D}_K(\Omega) \cap U$.

- (c) Sei $V \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ mit $V \not\subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$ für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann gibt es $(\varphi_m)_m$ in V und $(x_m)_m$ in Ω , sodass (x_m) keinen Häufungspunkt hat und $\varphi_m(x_m) \neq 0$. Sei

$$U := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : |\varphi(x_m)| < \frac{|\varphi_m(x_m)|}{m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

Dann gilt $\varphi_m \notin mU$. Da $K \cap \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ endlich ist für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt, gilt $\mathcal{D}_K(\Omega) \cap U$ offen in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ als Schnitt endlich vieler offener Mengen. Außerdem ist U konvex und kreisförmig. Damit ist $U \in \mathcal{U}$. Da $\varphi_m \notin mU$ gilt, ist V nicht beschränkt. Es folgt die 1. Behauptung, d.h. es gibt ein $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $V \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$. Damit ist V beschränkt in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ nach (b). Damit ist p_m beschränkt auf V für alle $m \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), p_m(\varphi) < 1\}$$

ist eine Nullumgebung, d.h. es gibt k_m mit $V \subseteq k_m\{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega), p_m(\varphi) < 1\}$, d.h. $p_m(\varphi) < k_m, \varphi \in V$. $\square$

- 1.10 Satz.** (a) Sei (φ_k) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ (d.h. für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $\varphi_n - \varphi_m \in U$ für n, m groß). Dann gibt es ein $K \subseteq \Omega$ mit $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ und

$$\lim_{k, \ell \rightarrow \infty} \underbrace{\max\{|\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi_\ell(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq m\}}_{=:\|\varphi_k - \varphi_\ell\|_m} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- (b) Sei $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann konvergiert φ_k gegen φ genau dann, wenn es ein kompaktes $K \subseteq \Omega$ gibt, sodass $\text{supp } \varphi \subseteq K$ und $\text{supp } \varphi_k \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
- (c) $\mathcal{D}(\Omega)$ ist vollständig.

Beweis. (a) Wir zeigen, dass Cauchy-Folgen beschränkt sind. Sei W eine kreisförmige Nullumgebung, und $V \in \mathcal{U}$ mit $V + V \subseteq W$. Dann ist $\varphi_n - \varphi_m \in V$ für n, m groß. Es gibt $s > 1$ und $\varphi_m \in sV$ (Atome sind beschränkt). Dann ist $\varphi_n \in \varphi_m + V \subseteq sV + V \subseteq sV + sV \subseteq sW$ für n groß. Nach Satz 1.9 (c) gibt es ein $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $(\varphi_k)_m$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Nach Satz 1.9 (b) ist $(\varphi_k)_k$ auch eine Cauchy-Folge in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ und da $\mathcal{T}_K$ von $(p_m)_m$ erzeugt und p_m und $\|\cdot\|_m$ identisch auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ für große m , folgt die zweite Behauptung.

- (b) $(\Rightarrow)$ folgt aus (a), konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen. Andererseits liefert gleichmäßige Konvergenz und Träger in K die Konvergenz in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Dann Satz 1.9 (b).
- (c) Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$. Aus (a) wissen wir, dass es $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt, sodass $(\varphi_k)_k$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist. Da $\mathcal{D}_K(\Omega)$ vollständig ist, gibt es ein $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Mit (b) folgt dann $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

Bemerkung. (a) $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T})$ ist nicht metrisierbar!

- (b) Für $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sei

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \min\{\|\varphi - \psi\|_m, 1\}$$

Dann ist d eine Metrik auf $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in d genau dann, wenn $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Aber, die Trägerbedingung ist nicht erfüllbar! Die von d erzeugte Topologie ist nicht vollständig. Sei $n = 1$ und $\Omega = \mathbb{R}$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq [0, 1]$ und $\varphi(x) > 0$ für $x \in (0, 1)$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_k := \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell} \varphi(\cdot - \ell)$. Es folgt, dass $(\varphi_k)_k$ eine Cauchy-Folge bzgl. d ist, aber $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$ (punktweise) hat keinen kompakten Träger!

1.11 Satz. *Sei Y ein lokalkonvexer topologischer Hausdorff-Vektorraum, $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent*

- (a) T ist stetig.
- (b) Für $(\varphi_k)_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_k \rightarrow 0$ gilt $T\varphi_k \rightarrow 0$ in Y .
- (c) Für $K \subseteq \Omega$ kompakt ist $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ stetig bezüglich $\mathcal{T}_K$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sei $U \subseteq Y$ offen und $V := T^{-1}(U) \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$. Sei $(\varphi_k)_k$ in $V^c \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Dann ist $(T\varphi_k)_k$ konvergent und $T\varphi_k \notin U$. Da U offen ist, ist $T\varphi \notin U$. Also ist $\varphi \notin T^{-1}(U)$, also $\varphi \in V^c \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Satz 1.9 (a). □

2 Faltung

Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$\begin{aligned} L_{\text{loc}}^1(\Omega) &= \{f: \Omega \longrightarrow \mathbb{K} : \forall x \in \Omega \exists U_x \in \mathcal{T} : x \in U_x \wedge f|_{U_x} \in L^1(U_x)\} \\ &= \{f: \Omega \longrightarrow \mathbb{K} : \forall K \subseteq \Omega \text{ kompakt} : f|_K \in L^1(K)\} \end{aligned}$$

mit der üblichen Identifikation von fast überall gleichen Funktionen.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $\rho \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung $\rho * f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\rho * f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)f(x-y) \, dy$$

2.1 Lemma. Sei $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $\rho \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\rho * f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\partial^\alpha(\rho * f) = (\partial^\alpha \rho) * f$ für alle $|\alpha| \leq m$.

Beweis. (i) $\rho * f$ ist stetig, denn sei $R > 0$ und $x, x' \in B_R(0)$. Sei $R' > 0$, sodass $\text{supp } \rho \subseteq B_{R'}(0)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\rho * f(x) - \rho * f(x')| &\leq \int_{B_{R+R'}(0)} |\rho(x-y) - \rho(x'-y)| \cdot |f(y)| \, dy \\ &\leq \underbrace{\sup_{y \in B_{R+R'}(0)} |\rho(x-y) - \rho(x'-y)|}_{=: A(x, x')} \cdot \int_{B_{R+R'}(0)} |f(y)| \, dy \end{aligned}$$

Da ρ gleichmäßig stetig ist, folgt

$$A(x, x') \leq \sup \left\{ |\rho(z) - \rho(z')| : z, z' \in \mathbb{R}^n, |z - z'| = |x - x'| \right\}$$

und da der letzte Ausdruck für x nahe x' klein ist, ist $\rho * f$ stetig.

(ii) Es ist $\rho * f$ stetig partiell differenzierbar: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} (\rho * f)(x + te_j) - (\rho * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\rho(x + te_j - y) - \rho(x - y)) f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \partial_i \rho(x + se_j - y) \, ds f(y) \, dy \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \rho(x + se_j - y) f(y) \, dy \, ds \\ &= \int_0^t (\partial_j \rho * f)(x + se_j) \, ds \end{aligned}$$

Der Hauptsatz (erneut) liefert die Behauptung. Der Rest ist Induktion. $\square$

Definition. Eine Folge $(\rho_j)_j$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$ heißt δ -Folge, wenn $\rho_j \geq 0$, $\text{supp}(\rho_j) \subseteq B_{\frac{1}{j}}(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_j = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

2.2 Satz. Sei $(\rho_k)_k$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$ eine δ -Folge.

(a) Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert $\rho_k * f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(b) Sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\rho_k * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, es gilt die Abschätzung $\|\rho_k * f\|_p \leq \|f\|_p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\rho_k * f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (a) Sei $R > 0$. Für $|x| \leq R$ gilt

$$\begin{aligned} |\rho_k * f(x) - f(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(y) (f(x-y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \rho_k(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \sup \left\{ |f(z) - f(z')| : |z|, |z'| \leq R+1, |z - z'| < \frac{1}{k} \right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

da f gleichmäßig stetig auf $\overline{B}_{R+1}(0)$. Da dies gleichmäßig in x ist, folgt die Behauptung.

(b) Ist $1 < p < \infty$ und sei p' der Hölder-konjugierte zu p , dann ist

$$\begin{aligned} |\rho_k * f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y)^{\frac{1}{p'} + \frac{1}{p}} f(y) dy \right| \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y) dy \right)^{\frac{1}{p'}}}_{=1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Für $p = 1$ ist die Abschätzung auch wahr, klar. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_k * f(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y) |f(y)|^p dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x-y) dx}_{=1} |f(y)|^p dy = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

Sei $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es $R > 0$ sodass $\text{supp } g \subseteq \overline{B}_R(0)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $\text{supp } \rho_k * g \subseteq \overline{B}_{R+1}(0)$ und $\rho_k * g \rightarrow g$ gleichmäßig nach (a). Damit ist $\rho_k * g \rightarrow g$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ein $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Dann ist

$$\|\rho_k * f - f\|_p \leq \|\rho_k * (f - g)\|_p + \|\rho_k * g - g\|_p + \|g - f\|_p \quad \square$$

Bemerkung. Sei $1 \leq p < \infty$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist $x \mapsto f(\bullet - x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig, denn

$$\|f(\bullet - x) - f(\bullet - x')\|_p = \|f(\bullet - (x - x')) - f\|_p$$

Für $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ist $g(\bullet - x) \rightarrow g$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, klar. Der Rest, siehe oben.

2.3 Korollar. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$. Dann ist $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ bzgl. der L^p -norm.

Beweis. Sei $f \in L_p(\Omega)$ und sei $(\Omega_k)_k$ die Standardausschöpfung. Dann ist $\mathbb{1}_{\Omega_k} f \rightarrow f$ in $L^p(\Omega)$. Damit ist oBdA $f \equiv 0$ außerhalb eines geeigneten Kompaktums. Wir falten mit einer δ -Folge (ρ_k) in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\rho_k * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\rho_k * f) \subseteq \text{supp } f + \overline{B}_{\frac{1}{k}}(0) \subseteq \Omega$ und $\rho_k * f|_\Omega \rightarrow f$ in $L_p(\Omega)$. $\square$

2.4 Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Angenommen,*

$$\int_{\Omega} f \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Dann ist $f \equiv 0$ fast überall.

Beweis. Sei $(\rho_k)_k$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine δ -Folge. Sei $x \in \Omega$, $r > 0$, sodass $\overline{B}_{2r}(x) \subseteq \Omega$. Dann sei $g := \mathbb{1}_{\overline{B}_{2r}(x)} f \in L^1(\Omega)$. Setze g mit Null auf $\mathbb{R}^n$ fort. Dann ist $\rho_k * g \rightarrow g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 2.2. Für $k \geq \frac{1}{r}$ und $y \in B_r(x)$ folgt dann

$$\begin{aligned} (\rho_k * g)(y) &= \int_{B_{2r}(0)} \rho_k(y - z) g(z) \, dy \\ &= \int_{\Omega} \rho_k(y - z) f(z) \, dz = \int_{\Omega} f \cdot \rho_k(y - \bullet) = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für große k :

$$0 = \rho_k * g|_{B_r(x)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g|_{B_r(x)} = f|_{B_r(x)}$$

in $L^1(B_r(x))$, also $f|_{B_r(x)} = 0$ fast überall und damit $f = 0$. □

3 Der Raum $\mathcal{D}(\Omega)'$ der Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Definition. Eine Distribution u auf Ω ist eine stetige lineare Abbildung $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$. Die Menge $\mathcal{D}(\Omega)'$ (manchmal $\mathcal{D}'(\Omega)$) ist der Vektorraum der Distributionen.

3.1 Satz. Sei $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ linear. Dann sind äquivalent:

- (i) $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$.
- (ii) Ist $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, sodass $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$, dann folgt $u(\varphi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(\varphi)$.
- (iii) Für jede kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$, $C \geq 0$, sodass

$$|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{m,K} =: C \cdot \max \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m \right\}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

Beweis. Im Wesentlichen ist dies eine Anwendung von Satz 1.11.

- (a) $\Rightarrow$ (b) Trivial.
- (b) $\Rightarrow$ (c) Angenommen, (c) gilt nicht. Dann gibt es $K \subseteq \Omega$ kompakt, sodass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ eine Funktion $\varphi_m \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ existiert mit

$$1 = u(\varphi_m) > m \|\varphi_m\|_{m,K}$$

Dann ist $\varphi_m \rightarrow 0$ aber $u(\varphi_m) = 1 \nrightarrow 0$.

- (c) $\Rightarrow$ (a) Satz 1.11. □

Beispiele. (a) Die δ -Distribution. Für $x \in \Omega$, ist $\delta_x \in \mathcal{D}(\Omega)'$ definiert durch $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ definiert durch $u(\varphi) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \partial^n \varphi(n)$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(c) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und definiere $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ durch $u(\varphi) := \int_0^1 \varphi(x) dx$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3.2 Satz. Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann definiert

$$u_f(\varphi) := \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eine Distribution. Die Abbildung $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \ni f \mapsto u_f \in \mathcal{D}(\Omega)'$ ist linear und injektiv.

Beweis. Dass u_f linear ist, ist klar. Für ein $K \subseteq \Omega$ kompakt, $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ gilt

$$|u_f(\varphi)| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{0,K} \cdot \int_K |f(x)| dx$$

Also ist u_f stetig (mit $m = 0$ und $C = \|f\|_{L^1(K)}$) nach Satz 3.1 (c). Linearität der Einbettung ist klar und Injektivität ist das Fundamentallemma der Variationsrechnung 2.4. □

Definition. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ heißt regulär, falls es ein $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gibt, sodass $u = u_f$.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\mathcal{D}(\Omega)^m := \left\{ u \in \mathcal{D}(\Omega)' : \forall K \subseteq \Omega \text{ kompakt } \exists C > 0 : |u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{m,K}, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \right\}$$

der Unterraum der Distributionen der Ordnung m .

Beispiel. Es gilt $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)^0$. Gleichheit gilt nicht, da $\delta_x \in \mathcal{D}(\Omega)^0 \setminus L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ für alle $x \in \Omega$ gilt (Übung).

3.3 Satz. Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $u \in \mathcal{D}(\Omega)^m$. Dann gibt es eine eindeutige lineare Fortsetzung $\tilde{u}: C_c^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ von u , sodass für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt ein $C \geq 0$ existiert, sodass die Ungleichung $|\tilde{u}(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_m$ für alle $\varphi \in C_c^m(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq K$ gilt.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^m(\Omega)$, $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $\text{supp } \varphi \subseteq K$. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi_k \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\|\varphi_k - \varphi\|_m \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Sei $C > 0$ aus der Definition von $\mathcal{D}(\Omega)^m$ zu K . Setze $\tilde{u}(\varphi) := \lim_{k \rightarrow \infty} u(\varphi_k)$. Wie üblich ist das eine wohldefinierte Fortsetzung, denn für $k \in \mathbb{N}$ ist $|u(\varphi_k)| \leq C \|\varphi_k\|_m$ und beide Seiten konvergieren gegen $|\tilde{u}(\varphi)|$ bzw $C \|\varphi\|_m$, womit die Unabhängigkeit von der Wahl der Folge folgt. $\square$

Bemerkung. Der Satz von Riesz-Markov-Saks-Kakutani liefert, dass lineare Abbildungen $u: C_c(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt ein $C > 0$ existiert mit $|u(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_0$ durch ein lokal endliches reguläres komplexes/reelles Borel-Maß gegeben. Der Raum dieser Maße bezeichnet man mit $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$ sind. Satz 3.3 besagt, dass die Isomorphie $\mathcal{D}(\Omega)^0 \cong \mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt.

3.4 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ mit $u(\varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$, $\mu \geq 0$, sodass $u = u_\mu$ (nach RMK).

Beweis. Wir zeigen $u \in \mathcal{D}(\Omega)^0$. Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Es gibt $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ auf K nach Korollar 1.3. Für alle reellwertigen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq K$ folgt dann $\|\varphi\|_0 \psi \pm \varphi \geq 0$. Damit ist $u(\|\varphi\|_0 \psi \pm \varphi) \geq 0$, d.h. $\pm u(\varphi) \leq u(\psi) \|\varphi\|_0$, also auch $|u(\varphi)| \leq u(\psi) \|\varphi\|_0$. Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\text{supp } \varphi \subseteq K$ und φ komplex, so wähle $\theta \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\theta} u(\varphi) \in \mathbb{R}$. Anwendung von obigem auf $\text{Re}(e^{i\theta} \varphi)$ liefert die Behauptung. $\square$

Definition. Die schwach*-Topologie $\sigma(\mathcal{D}(\Omega)', \mathcal{D}(\Omega))$ auf $\mathcal{D}(\Omega)'$ ist die grösste Topologie, sodass alle Abbildungen $\mathcal{D}(\Omega)' \ni u \mapsto u(\varphi) \in \mathbb{K}$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ stetig sind. Ist $(u_k)_k$ in $\mathcal{D}(\Omega)'$, $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$, so bedeutet $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ in $\mathcal{D}(\Omega)'$ also, dass $u_k(\varphi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3.5 Satz. Sei $(u_k)_k$ in $\mathcal{D}(\Omega)'$ und für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existiere $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\varphi) =: u(\varphi)$. Dann ist $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ in $\mathcal{D}(\Omega)'$.

Beweis. Dass u linear ist, ist klar. Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es nach Satz 3.1 ein $m_k \in \mathbb{N}_0$, $C_k \geq 0$, sodass $|u_k(\varphi)| \leq C_k \|\varphi\|_{m_k}$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Damit ist $u_k: \mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ stetig für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ ist $(u_k(\varphi))_k$ konvergent, insbesondere beschränkt. Damit ist $(u_k)_k$ eine punktweise beschränkte Folge stetiger linearer Abbildungen $\mathcal{D}_K(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$. Da $(\mathcal{D}_K(\Omega), \mathcal{T}_K)$ ein vollständiger metrisierbarer Raum ist, folgt aus dem Satz von Banach-Steinhaus, dass $(u_k)_k$ gleichgradig stetig ist. Also gibt es $m \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$ sodass $|u_k(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_m$. Für $k \rightarrow \infty$ ist $|u(\varphi)| \leq \|\varphi\|_m$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Nach Satz 3.1 ist dann $u_k \rightarrow u$ klar. $\square$

Beispiel. Cauchy'scher Hauptwert zu $g: x \mapsto \frac{1}{x}$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k := g \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, -\frac{1}{k}) \cup (\frac{1}{k}, \infty)}(x)$ und $u_k := u_{f_k}$, d.h.

$$u_k(\varphi) := \left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{k}} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Dann ist $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Distribution (Übung 1).

Beispiel. Für $\varepsilon > 0$ sei $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiert

$$u_\varepsilon(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx$$

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Es gibt dann ein $R > 0$, sodass $\text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx &= \int_{-R}^R \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx \\ &= \varphi(0) \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \int_{-R}^R \frac{1}{x + i\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &= \varphi(0) \left(-2i \arctan \frac{R}{\varepsilon} \right) + \underbrace{\int_{-R}^R \frac{1}{x + i\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx}_{|\cdot| \leq \frac{1}{\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0))} \\ &\xrightarrow[DCT]{\varepsilon \rightarrow 0} -i\pi \delta_0(\varphi) + \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= -i\pi \delta_0(\varphi) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) \end{aligned}$$

Also $u_\varepsilon \rightarrow -i\pi \delta_0 + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$. Diese Formel heißt Formel von Sochotzki-Plemelj.

3.6 Lemma. Sei $(\rho_k)_k$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$ eine δ -Folge. Dann ist $u_{\rho_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \delta := \delta_0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$.

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$u_{\rho_k}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k \varphi$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist

$$u_{\rho_k}(\varphi) - \delta(\varphi) = \int \rho_k(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $k \geq k_0$ und $|x| \leq \frac{1}{k}$ gilt, dass $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$. Für $k \geq k_0$ ist dann

$$|u_{\rho_k}(\varphi) - \delta(\varphi)| \leq \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} \rho_k(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \int \rho_k \cdot \varepsilon = \varepsilon \quad \square$$

4 Träger von Distributionen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Definition. Sei $\Omega' \subseteq \Omega$ offen und $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Wir sagen, dass u auf Ω' verschwindet ($u = 0$ auf Ω'), falls für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega'$ gilt, dass $u(\varphi) = 0$. Es ist $u = v$ auf Ω' genau dann, wenn $u - v = 0$ auf Ω' .

4.1 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von Ω . Dann ist $u = 0$ genau dann wenn für alle $i \in J$ gilt, dass $u = 0$ auf U_i ist.

Beweis. $(\Rightarrow)$ klar.

$(\Leftarrow)$ Zu $(U_i)_{i \in J}$ gibt es eine Zerlegung der Eins $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, für alle $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein $i \in J$ mit $\text{supp } \varphi_j \subseteq U_i$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann ist $\varphi = \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j \varphi$ und da $\text{supp } \varphi$ kompakt ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodass (nach Umsortieren) $\varphi = \sum_{j=1}^m \varphi_j \varphi$. Damit ist $u(\varphi) = \sum_{j=1}^m u(\varphi_j \varphi) = 0$. $\square$

Definition. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Der Träger von u ist definiert durch

$$\begin{aligned} \text{supp } u &= \Omega \setminus \bigcup \{ \Omega' \subseteq \Omega : \Omega' \text{ ist offen, } u = 0 \text{ auf } \Omega' \} \\ &= \Omega \setminus \{ x \in \Omega : \exists r_x > 0, B_{r_x}(x) \subseteq \Omega, u = 0 \text{ auf } B_{r_x}(x) \} \end{aligned}$$

Für $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ ist also $\text{supp } u$ abgeschlossen in Ω und $u = 0$ auf $\Omega \setminus \text{supp } u$ (Satz 4.1). $\Omega \setminus \text{supp } u$ ist die größte Teilmenge von Ω auf der u verschwindet.

Bemerkungen. (a) Für $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ folgt $u(\varphi) = 0$.

(b) Für $f \in C(\Omega)$ ist $\text{supp } f = \text{supp } u_f$, denn sei $\Omega' \subseteq \Omega$ offen. Dann ist $\Omega' \cap \text{supp } f = \emptyset$ genau dann wenn $u_f = 0$ auf Ω' , wegen der Injektivität von $f \mapsto u_f$. Damit ist

$$\begin{aligned} \Omega \setminus \text{supp } u_f &= \bigcup \{ \Omega' : \Omega' \subseteq \Omega \text{ offen, } u_f = 0 \text{ auf } \Omega' \} \\ &= \bigcup \{ \Omega' : \Omega' \subseteq \Omega \text{ offen, } \Omega' \cap \text{supp } f = \emptyset \} = \Omega \setminus \text{supp } f \end{aligned}$$

(c) Diese Definition erlaubt auch einen Trägerbegriff für $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ -Funktionen (also L^p -Funktionen), und auch für lokal-endliche Maße.

4.2 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ mit $\text{supp } u$ kompakt. Dann gibt es genau eine Fortsetzung $\tilde{u}: C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ linear mit $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\tilde{u}(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } u = \emptyset$.

Beweis. Da $\text{supp } u$ kompakt ist, liefert Korollar 1.3 ein $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi = 1$ in einer Umgebung von $\text{supp } u$. Sei $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ und setze $\varphi_0 := \psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi_1 := (1 - \psi)\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Dann ist $\text{supp } \varphi_1 \cap \text{supp } u = \emptyset$ und $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Sei $\tilde{u} := u(\varphi_0)$. Dann ist $\tilde{u}$ wohldefiniert, denn ist $\varphi = \varphi'_0 + \varphi'_1$ mit $\varphi'_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi'_1 \in C^\infty(\Omega)$, $\text{supp } \varphi'_1 \cap \text{supp } u = \emptyset$, dann ist $\varphi_0 + \varphi_1 = \varphi'_0 + \varphi'_1$, also $\varphi_0 - \varphi'_0 = \varphi'_1 - \varphi_1$, sodass die linke Seite in $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt und für die rechte Seite $\text{supp}(\varphi'_1 - \varphi_1) \cap \text{supp } u = \emptyset$. Also ist $u(\varphi_0 - \varphi'_0) = 0$, also ist $\tilde{u}$ wohldefiniert. Linearität ist klar. Zur Eindeutigkeit seien $\tilde{u}, \tilde{u}'$ zwei solche Abbildungen. Dann gilt für $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ und $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ mit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\text{supp } \varphi_1 \cap \text{supp } u = \emptyset$, dass $\tilde{u}(\varphi) = \tilde{u}(\varphi_0) = u(\varphi_0) = \tilde{u}'(\varphi_0) = \tilde{u}'(\varphi)$. $\square$

Definition. Sei $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$. Sei $\mathcal{T}$ die Initialtopologie auf $\mathcal{E}(\Omega)$ bezüglich der Abbildungen

$$\mathcal{E}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \sum_{|\alpha| \leq m} \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K \right\} \quad m \in \mathbb{N}_0, K \subseteq \Omega \text{ kompakt}$$

d.h. die grösste Topologie, die alle dieser Abbildungen stetig macht. Den Dualraum $\mathcal{E}(\Omega)' = (\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{T})'$, mit der schwach*-Topologie, nennen wir die Distributionen mit kompaktem Träger.

Bemerkung. (a) Sei $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Dann gilt $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega)'$ genau dann wenn für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt und alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Ableitungen $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig konvergieren.

(b) Sei $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann impliziert $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ die Konvergenz $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$. Insofern sprechen wir von einer stetigen Einbettung $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$.

(c) Es ist $u \in \mathcal{E}(\Omega)'$ genau dann wenn für alle $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{E}(\Omega)$, und $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}$ gilt, dass $u(\varphi_k) \rightarrow u(\varphi)$.

4.3 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$.

(a) Sei $\text{supp } u$ kompakt. Dann gibt es genau ein $\tilde{u} \in \mathcal{E}(\Omega)'$ mit $\tilde{u}|_{\mathcal{D}(\Omega)} = u$.

(b) Es ist $u \in \mathcal{E}(\Omega)'$ genau dann wenn $\text{supp } u$ kompakt.

Beweis. (a) Aus Satz 4.2 wissen wir, dass genau ein lineares $\tilde{u}: \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ existiert. Sei $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}$: Sei $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi = 1$ in einer Umgebung von $\text{supp } u$. Dann ist $\tilde{u}(\varphi_k) = u(\psi \varphi_k)$. Wegen $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}$ folgt $\psi \varphi_k \rightarrow \psi \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Damit ist $\tilde{u}(\varphi_k) = u(\psi \varphi_k) \rightarrow u(\psi \varphi) = \tilde{u}(\varphi)$.

(b) $(\Leftarrow)$ ist (a).

$(\Rightarrow)$ Sei $\text{supp } u$ nicht kompakt und $(\Omega_k)_k$ die Standardausschöpfung. Dann gilt $\text{supp } u \not\subseteq \overline{\Omega_k}$ für alle k . Also existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi_k \cap \overline{\Omega_k} = \emptyset$ und $u(\varphi_k) = 1$. Dann konvergiert $\varphi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{E}(\Omega)$, aber $u(\varphi_k) = 1 \neq 0$. $\square$

4.4 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Dann sind äquivalent:

(a) $\text{supp } u$ ist kompakt.

(b) Es gibt $K \subseteq \Omega$ kompakt, $m \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$ mit

$$|u(\varphi)| \leq C \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m \right\} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi = 1$ in einer Umgebung von $\text{supp } u$ und setze $K := \text{supp } \psi$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$, sodass

$$|u(\varphi)| \leq C \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m \right\} \quad \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt $u(\varphi) = u(\psi \varphi)$ und damit folgt

$$|u(\varphi)| \leq C_0 \sup \left\{ |\partial^\alpha (\psi \varphi)(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m \right\} \leq C \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m \right\}$$

für ein $C \geq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$. Nach Voraussetzung existiert ein $K \subseteq \Omega$ kompakt und $m \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\sup \left\{ |\partial^\alpha (\varphi_k - \varphi)(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m \right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Also folgt $|u(\varphi_k - \varphi)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, also $u \in \mathcal{E}(\Omega)'$. Nach Satz 4.3 ist $\text{supp } u$ kompakt. $\square$

Bemerkung. In Satz 4.4 (b) kann im Allgemeinen nicht $K = \text{supp } u$ gewählt werden, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel (Hörmander). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und es gebe eine Folge $(K_j)_j$ nicht-leerer kompakter Teilmengen von K , die paarweise disjunkt sind, sodass $K \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_j)$ kompakt für $j \in \mathbb{N}$ (z.B. $K = \{\frac{1}{j} : j \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $K_j := \{\frac{1}{j}\}$). Wähle $x_j \in K_j$ und einen Häufungspunkt x_0 von $(x_j)_j$. Sei¹ $(m_j)_j \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ mit $\sum m_j = \infty$ und $\sum_j m_j |x_j - x_0| = 1$. Wir definieren

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} m_j (\varphi(x_j) - \varphi(x_0)) \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Dann gilt für $R > 0$ mit $\overline{B}_R(0) \subseteq K$, dass

$$|u(\varphi)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{B}_R(0))}$$

Nach Satz 4.3 und 4.4 ist $\text{supp } u$ kompakt, $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$. Es ist

$$\text{supp } u \subseteq \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} \{x_j\}} \subseteq K$$

Angenommen, es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, $C \geq 0$ mit

$$|u(\varphi)| \leq C \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in \text{supp } u, |\alpha| \leq m \right\} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Wähle eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi = 1$ in einer Umgebung von $K_1 \cup \dots \cup K_j$, $\varphi = 0$ und $\varphi = 0$ in einer Umgebung von $K \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_j)$ (Lemma von Urysohn). Dann ist

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^j m_j \leq C$$

Also ist $\sum m_j < \infty$ $\nmid$.

Kann $\text{supp } u$ die Distribution u festlegen?

4.5 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } u = \{0\}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $c_\alpha \in \mathbb{K}$ für $|\alpha| \leq m$, sodass

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

¹ Dies existiert nach folgendem Argument. Sei $(x_j)_j$ in $[0, \infty)$ beschränkt, 0 ein Häufungspunkt von (x_j) , dann existiert eine Folge $(m_j)_j$ in $(0, \infty)$ mit $\sum m_j = \infty$ und $\sum m_j x_j = 1$. Denn, es existiert eine Teilfolge (x_{j_k}) mit $x_{j_k} \leq 2^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Sei $J := \mathbb{N} \setminus \{j_k : k \in \mathbb{N}\}$. Wegen $(x_j)_{j \in J} \in \ell^\infty(J)$ gibt es $(m_j)_{j \in J} \in \ell^1(J)$ mit $m_j > 0$ sodass $\sum_{j \in J} m_j x_j = \frac{1}{2}$. Setze $m_{j_k} := m \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann folgt $\sum_{j \in \mathbb{N}} m_j x_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} m_j x_j + \sum_{k \in \mathbb{N}} m_{j_k} x_{j_k} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Aber $\sum_{k \in \mathbb{N}} m_{j_k} = \infty$.

4.6 Lemma. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$, $\eta \in C^{m+1}(B_r(0))$, mit $\partial^\alpha \eta(0) = 0$ für $|\alpha| \leq m$. Dann gibt es ein $C \geq 0$, sodass

$$|\partial^\alpha \eta(x)| \leq C|x|^{m+1-|\alpha|}$$

für $|x| \leq \frac{r}{2}$ und $|\alpha| \leq m$.

Beweis. OBdA sei $r = 1$. Wir führen Induktion über m . Für $m = 0$ ist

$$|\eta(x)| = \left| \sum_{j=1}^n \int_0^1 x_j \partial_j \eta(tx) dt \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \sup \left\{ |\partial_j \eta(x)| : |x| \leq \frac{1}{2} \right\} \quad |x| \leq \frac{1}{2}$$

Im Induktionsschritt gelte die Behauptung für $m-1$ und für $|\alpha| \leq m$, $\alpha \neq 0$ ist $\partial^\alpha \eta \in C^{m+1-|\alpha|}(B_1(0))$. Nach Voraussetzung ist für $k < m$:

$$|\partial^\alpha \eta(x)| \leq C|x|^{(m-|\alpha|)+1-0} \quad |x| \leq \frac{1}{2}$$

Für $\alpha = 0$ ist

$$|\eta(x)| = \left| \sum_{j=1}^n \int_0^1 x_j \underbrace{\partial_j \eta(tx)}_{|\cdot| \leq C|tx|^m} dt \right| \leq C \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |x|^m \int_0^1 t^m dt \leq C|x|^{m+1} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \quad \square$$

Beweis von Satz 4.5. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$, sodass für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq \overline{B}_1(0)$ gilt, dass

$$|u(\varphi)| \leq C \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in \overline{B}_1(0), |\alpha| \leq m \right\}$$

Sei $c_\alpha := \frac{1}{\alpha!} u(p_\alpha)$ mit $p_\alpha(x) := x^\alpha$ (natürlich ist $p_\alpha \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$). Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Taylor-Entwicklung gibt

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) x^\alpha + \eta(x)$$

wobei für η nach Lemma 4.6 gilt, dass $|\partial^\alpha \eta(x)| \leq C|x|^{m+1-|\alpha|}$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$. Dann folgt

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) u(p_\alpha) + u(\eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(0) + u(\eta)$$

Zu zeigen ist, dass $u(\eta) = 0$ ist. Sei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \psi \subseteq \overline{B}_1(0)$ und $\varphi(x) = 1$, $|x| \leq \frac{1}{2}$. Sei $\psi_k := \psi(k \cdot \bullet)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $u(\eta) = u(\psi_k \eta)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\|\partial^\beta \psi_k\|_\infty = k^{|\beta|} \cdot \|\partial^\beta \psi\|_\infty$$

und für $|\alpha| \leq m$ und $k \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha(\psi_k \eta)\|_\infty &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta} \psi_k \partial^\beta \eta\|_\infty \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \underbrace{k^{|\alpha-\beta|}}_{=k^{|\alpha|-|\beta|}} \|\partial^{\alpha-\beta} \psi\|_\infty \cdot C \left(\frac{1}{k}\right)^{m+1-|\beta|} \\ &\leq C \left(\frac{1}{k}\right)^{m+1-|\alpha|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Damit ist

$$|u(\eta)| = |u(\psi_k \eta)| \leq C \sup \left\{ |\partial^\alpha(\varphi_k \eta)(x)| : |x| \leq 1, |\alpha| \leq m \right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

Definition. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Der singuläre Träger von u ist definiert als

$$\text{sing supp} := \Omega \setminus \left\{ x \in \Omega : \exists r_x > 0, B_{r_x}(x) \subseteq \Omega, \exists f_x \in C^\infty(B_{r_x}(x)), u|_{B_{r_x}(x)} = u_{f_x}|_{B_{r_x}(x)} \right\}$$

4.7 Lemma. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Dann gibt es ein (eindeutiges) $f \in C^\infty(\Omega \setminus \text{sing supp } u)$, sodass $u = u_f$ auf $\Omega \setminus \text{sing supp } u$.

Beweis. Für alle $x \in \Omega \setminus \text{sing supp } u$ gibt es $r_x > 0$, einen Ball $B_{r_x}(x) \subseteq \Omega$ und eine Funktion $f_x \in C^\infty(B_{r_x}(x))$, sodass $u = u_{f_x}$ auf $B_{r_x}(x)$. Seien $x, y \in \Omega \setminus \text{sing supp } u$, mit $B_{r_x}(x) \cap B_{r_y}(y) \neq \emptyset$. Dann gilt auf $B_{r_x}(x) \cap B_{r_y}(y)$, dass $u_{f_x} = u = u_{f_y}$. Nach Satz 3.2 (Fundamentallemma) folgt $f_x = f_y$ fast überall auf $B_{r_x}(x) \cap B_{r_y}(y)$. Da $f_x, f_y \in C^\infty$ folgt dass $f_x = f_y$. Damit gibt es $f \in C^\infty(\Omega \setminus \text{sing supp } u)$ mit $u = u_f$ auf $\Omega \setminus \text{sing supp } u$ (Satz 4.1). $\square$

Bemerkung. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Dann ist $\Omega \setminus \text{sing supp } u$ die größte offene Menge, sodass u auf dieser offenen Menge durch C^∞ -Funktionen dargestellt wird.

Beispiel. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dann ist $\text{sing supp } \delta_0 = \{0\}$. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \neq 2$ und $E_n(x) := |x|^{2-n}$. Dann ist $\text{sing supp } u_{E_n} = \{0\}$.

5 Differentiation und Multiplikation von Distributionen

Sei $\Omega \setminus \mathbb{R}^n$ offen.

5.1 Lemma. Sei $m \in \mathbb{N}$, $f \in C^m(\Omega)$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq m$

$$\int_{\Omega} \partial^{\alpha} f(x) \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^{\alpha} \varphi(x) \, dx$$

Beweis. Leicht, Ana II. □

Anders geschrieben besagt Lemma 5.1, dass $u_{\partial^{\alpha} f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u_f(\partial^{\alpha} \varphi)$.

Definition. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $\partial^{\alpha} u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ definiert durch

$$\partial^{\alpha} u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^{\alpha} \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Für $f \in C^m(\Omega)$ und $|\alpha| \leq m$ ist damit $\partial^{\alpha} u_f = u_{\partial^{\alpha} f}$.

Bemerkung. Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar.

Definition. Seien $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Dann heißt g verallgemeinerte Ableitung (schwache Ableitung, Distributionsableitung) von f der Ordnung $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, falls $\partial^{\alpha} u_f = u_g$ gilt¹. Wir schreiben dann $g := \partial^{\alpha} f$.

Beispiel. (a) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist dann

$$\int H(x) \partial \varphi(x) \, dx = \int_0^{\infty} \partial'(x) \, dx = -\varphi(0)$$

d.h. $\partial u_H(\varphi) = -u_H(\partial \varphi) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$.

(b) Sei $x \in \Omega$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\partial^{\alpha} \delta_x(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_x(\partial^{\alpha} \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} \varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Satz 4.5 besagt, dass $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$, $\text{supp } u = \{x\}$ impliziert, dass

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} c_{\alpha} \partial^{\alpha} \delta_x$$

5.2 Lemma. Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f \in L_{\text{loc}}^1(a, b)$ mit $\partial u_f = 0$. Dann gibt es $c \in \mathbb{K}$, sodass $f = c$ fast überall.

Beweis. Sei $\psi \in \mathcal{D}(a, b)$ mit $\int_a^b \psi = 1$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$. Wir setzen

$$\Phi(x) := \int_a^x \left(\varphi(t) - \psi(t) \int_a^b \varphi(s) \, ds \right) dt \quad \forall x \in (a, b)$$

Dann ist $\Phi \in \mathcal{D}(a, b)$ und es gilt $\partial \Phi = \varphi - \psi \int_a^b \varphi$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \partial u_f(\Phi) = -u_f(\partial \Phi) \\ &= - \int_a^b f \partial \Phi = - \int_a^b f \varphi + \int_a^b f \psi \int_a^b \varphi = \int_a^b \left(\int_a^b f \psi - f \right) \varphi = u_{\int_a^b f \psi - f}(\varphi) \end{aligned}$$

Aus Satz 3.2 folgt, dass $\int_a^b f \psi - f = 0$ fast überall. □

¹Die schwache Ableitung ist eindeutig nach dem Fundamentallemma 2.4.

5.3 Satz (Lemma von du Bois-Raymond). *Seien $f, g \in C(\Omega)$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\partial_j u_f = u_g$ (oder $\partial_j f = g$). Dann ist f nach der j -ten Variable stetig partiell differenzierbar mit $\partial_j f = g$ (einfacher Regularitätsatz).*

Beweis. OBdA ist $j = 1$ und $\Omega = (-1, 1)^n$. Sei $\tilde{f} \in C(\Omega)$ definiert durch

$$\tilde{f}(x) := f(0, \hat{x}) + \int_0^{x_1} g(t, \hat{x}) dt \quad \forall (x_1, \hat{x}) \in \Omega$$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig partiell differenzierbar nach der ersten Variable und $\partial_1 \tilde{f} = g$. Daher ist $\partial u_{\tilde{f}-f} = \partial_1 u_{\tilde{f}} - \partial_1 u_f = 0$. Damit folgt die Vereinfachung $g = 0$ und $f(0, \hat{x}) = 0$ für alle $\hat{x} \in (-1, 1)^{n-1}$. Zu zeigen ist, dass $f = 0$. Sei $\hat{\Omega} := (-1, 1)^{n-1}$ und $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\hat{\Omega})$. Sei $f_1 \in C(-1, 1)$ definiert durch

$$f_1(t) := \int_{\hat{\Omega}} f(t, \hat{x}) \hat{\varphi}(\hat{x}) d\hat{x}$$

Dann ist $f_1(0) = 0$. Für $\varphi_1 \in \mathcal{D}(-1, 1)$ ist

$$-\partial u_{f_1}(\varphi) = \int_{-1}^1 f_1(t) \partial \varphi_1(t) dt = \int_{-1}^1 \int_{\hat{\Omega}} f(t, \hat{x}) \hat{\varphi}(\hat{x}) d\hat{x} \partial \varphi_1(t) dt$$

Setze $\varphi(t, \hat{x}) := \varphi_1(t) \cdot \hat{\varphi}(\hat{x})$, sodass $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Damit folgt nun nach Fubini

$$\int_{-1}^1 f_1 \partial \varphi_1(t) dt = \int_{\Omega} f(x) \partial_1 \varphi(x) dx = u_f(\partial_1 \varphi) = -\partial_1 u_f(\varphi) = 0$$

Aus Lemma 5.2 folgt, dass $f_1 = 0$ fast überall (und nach Stetigkeit überall) gilt. Damit ist

$$\int_{\hat{\Omega}} f(t, \hat{x}) \hat{\varphi}(\hat{x}) d\hat{x} = 0 \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(-1, 1), t \in (-1, 1)$$

Nach Satz 3.2 ist $f(t, \cdot) = 0$ fast überall für alle $t \in (-1, 1)$ und damit nach Stetigkeit überall. $\square$

Definition. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $f \in C^\infty(\Omega)$. Dann definieren wir die Distribution $f \cdot u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ durch $(f \cdot u)(\varphi) := u(f\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Bemerkung. Seien $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)'$ mit $\text{sing supp } u \cap \text{sing supp } v = \emptyset$. Es gibt dann $f_u \in C^\infty(\Omega \setminus \text{sing supp } u)$ und $f_v \in C^\infty(\Omega \setminus \text{sing supp } v)$, sodass $u = u_{f_u}$ auf $\Omega \setminus \text{sing supp } u$ und $v = v_{f_v}$ auf $\Omega \setminus \text{sing supp } v$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega \setminus \text{sing supp } u$ definieren wir

$$(u \cdot v)(\varphi) := (f_u \cdot v)(\varphi) = v(f_u \varphi)$$

Analog können wir für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega \setminus \text{sing supp } v$

$$(u \cdot v)(\varphi) := (f_v u)(\varphi) = u(f_v \varphi)$$

Klar ist, dass falls $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega \setminus (\text{sing supp } u \cap \text{sing supp } v)$, dann auch

$$(f_u \cdot v)(\varphi) = (f_v \cdot u)(\varphi)$$

gilt. Damit ist $u \cdot v \in \mathcal{D}(\Omega)'$ definiert (analog zu Satz 4.1).

5.4 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $x \in \Omega$. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $p_j \in C^\infty(\Omega)$ definiert durch $p_j(y) := y_j - x_j$. Sei $p_j u = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{K}$, sodass $u = c\delta_x$ gilt.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega \setminus \{x\}$. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ ist dann $\frac{\varphi}{p_j} \in \mathcal{D}(\Omega)$ und

$$u(\varphi) = u\left(p_j \cdot \frac{\varphi}{p_j}\right) = p_j \cdot u\left(\frac{\varphi}{p_j}\right) = 0$$

Damit ist $\text{supp } u \subseteq \{x\}$ und daher $u \in \mathcal{E}(\Omega)'$. Weiter gilt

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \varphi_j(x) \quad \forall y \in \Omega$$

mit geeigneten $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es folgt

$$u(\varphi) = u(\varphi(x) \cdot 1) + \sum_{j=1}^n \underbrace{u(p_j \varphi_j)}_{=p_j u(\varphi_j)=0} = u(1) \varphi(x) = u(1) \cdot \delta_x(\varphi)$$

Da u kompakten Träger besitzt, ist die konstante 1-Funktion erlaubt. □

6 Der Grundraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen

Definition. Wir definieren den Schwarzraum als den Raum der schnell fallenden Funktionen

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \forall m \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^m \cdot |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty \right\}$$

Für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind auch äquivalent:

- (1) $\varphi \in \mathcal{S}$.
- (2) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty$.
- (3) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| = 0$.
- (4) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m \cdot |\partial^\alpha \varphi(x)| = 0$.

Bemerkung. (a) Es ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

(b) $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$ und $\mathcal{S}$ ist dicht bezüglich der L^p -norm für alle $p \in [1, \infty]$.

Für $m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $p_m: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p_m(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} (1 + |x|)^m \cdot |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

6.1 Lemma. Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist p_m eine Norm.

Beweis. Trivial. □

Sei $d: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \min\{p_m(\varphi - \psi), 1\}$$

6.2 Satz. d ist eine translationsinvariante Metrik auf $\mathcal{S}$ und $(\mathcal{S}, d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Dass d eine Metrik ist, ist klar. Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ eine Cauchy-Folge bezüglich d . Für $R > 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ ist $(\varphi_k)_k$ auch eine Cauchy-Folge bezüglich $C^m(\overline{B}_R(0))$. Da $C^m(\overline{B}_R(0))$ vollständig ist, gibt es ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sodass $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig auf Kompakta für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Sei $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Es gibt $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $p_m(\varphi_k - \varphi_\ell) \leq \varepsilon$ für $k, \ell \geq k_0$. Zu jedem $R > 0$ gibt es ein $k_R \in \mathbb{N}$ mit

$$(1 + |x|)^m |\partial^\alpha \varphi_{k_R}(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad |x| \leq R$$

Dann ist $\varphi_{k_R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \varphi$ bezüglich p_m . Damit ist für $\ell \rightarrow \infty$ dann

$$p_m(\varphi_k - \varphi) \leq \varepsilon \quad k \geq k_0$$

Damit ist $\varphi \in \mathcal{S}$ und $p_m(\varphi_k - \varphi) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{m=M}^{\infty} 2^{-m} \min\{p_m(\varphi_k - \varphi), 1\} < \varepsilon$ und dann finden wir für die übrigen $M - 1$ Terme ein k_0^M mit $p_m(\varphi_k - \varphi) < \varepsilon$ für alle $m = 1, \dots, M$. □

Bemerkung. Sei $(\varphi_k)_k \subseteq \mathcal{S}$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann ist $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$ bezüglich d genau dann, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $m \in \mathbb{N}_0$ für alle

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^m \cdot |\partial^\alpha \varphi_k(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

6.3 Lemma. (a) Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}$. Dann ist auch $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$.

(b) Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$. Dann ist auch $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{E}$.

(c) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist folgendicht in $\mathcal{S}$.

Beweis. Die Teile (a) und (b) sind klar. Zu (c) sei $\varphi \in \mathcal{S}$, und $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta = 1$ auf $B_1(0)$ und sei $\eta_k := \eta(\frac{\bullet}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, $\eta_k \varphi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$ in $\mathcal{S}$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\partial^\alpha (\eta_k \varphi)(x) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \eta_k(x) \cdot \partial^{\alpha-\beta} \varphi(x)$$

Es ist

$$|\partial^\beta \eta_k(x)| = \left| \frac{1}{k^{|\beta|}} \partial^\beta \eta\left(\frac{x}{k}\right) \right| \leq \frac{1}{k^{|\beta|}} \|\partial^\beta \eta\|_\infty$$

Für $m \in \mathbb{N}$ folgt wegen $\eta_k(x) = 1$ und $\partial^\beta \eta_k(x) = 0$ auf $B_k(0)$:

$$\begin{aligned} |x|^m \cdot |\partial^\alpha \varphi(x) - \partial^\alpha (\eta_k \varphi)(x)| &\leq |x|^m \cdot |\partial^\alpha \varphi(x)(1 - \eta_k(x))| + \\ &\quad + |x|^m \cdot \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta \eta_k(x) \partial^{\alpha-\beta} \varphi(x)| \\ &\leq \sup_{|x| \geq k} \left(|x|^m \cdot |\partial^\alpha \varphi(x)| \cdot (1 + \|\eta\|_\infty) + |x|^m \cdot \sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \beta \neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} \frac{1}{k^{|\beta|}} \|\partial^\beta \eta\|_\infty \cdot |\partial^{\alpha-\beta} \varphi(x)| \right) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad \square$$

Definition. Eine temperierte Distribution (langsam wachsende Distribution) ist eine stetig lineare Abbildung $u: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}'$ den Vektorraum der temperierten Distributionen.

6.4 Lemma. Sei $u: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$ linear. Dann sind äquivalent:

(a) $u \in \mathcal{S}'$.

(b) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$ sodass für alle $\varphi \in \mathcal{S}$: $|u(\varphi)| \leq C p_m(\varphi)$.

Beweis. (b) $\Rightarrow$ (a) klar.

(a) $\Rightarrow$ (b) Gilt (b) nicht, so gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_m \in \mathcal{S}$, sodass die Ungleichung $|u(\varphi_m)| > m \cdot p_m(\varphi_m)$ gilt. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $\psi_m := \frac{1}{\sqrt{m \cdot p_m(\varphi_m)}} \varphi_m \in \mathcal{S}$. Dann ist $\psi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ in $\mathcal{S}$, denn für $m \geq m'$ gilt, dass $p_{m'}(\psi_m) \leq p_m(\psi_m) = \frac{1}{\sqrt{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Aber $u(\psi_m) > \sqrt{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ im Widerspruch zur Stetigkeit. $\square$

6.5 Lemma. Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{K}$ linear. Dann sind äquivalent:

- (a) Es gibt ein $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$ mit $u = \tilde{u}|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$.
- (b) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt: $|u(\varphi)| \leq Cp_m(\varphi)$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) ist Lemma 6.4.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta = 1$ in einer Umgebung von 0 und $\eta_k = \eta(\frac{\bullet}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt $\eta_k \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\eta_k \varphi \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$, insbesondere $p_m(\eta_k \varphi - \varphi) \rightarrow 0$. Damit ist $(u(\eta_k \varphi))_k$ eine Cauchy-Folge. Setze $\tilde{u}(\varphi) := \lim_{k \rightarrow \infty} u(\eta_k \varphi)$. Offenbar ist $\tilde{u}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}$ linear, es gilt $\tilde{u}|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = u$ und $|u(\eta_k \varphi)| \leq Cp_m(\eta_k \varphi)$ für $k \in \mathbb{N}$. Beide Seiten konvergieren gegen $|\tilde{u}(\varphi)|$ bzw. $Cp_m(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$. Lemma 6.4 liefert, dass $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$. $\square$

Bemerkung. Aus der Folgendichtheit von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}$ erhalten wir, dass $\tilde{u}$ eindeutig ist.

Offenbar ist $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)' \subsetneq \mathcal{S}' \subsetneq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$.

Definition. Für $u \in \mathcal{S}'$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir $\partial^\alpha u(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$.

6.6 Lemma. Für $u \in \mathcal{S}'$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}'$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 6.4. $\square$

Beispiele. (a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|)^{-m} dx < \infty \quad (6.1)$$

gibt. Betrachte

$$u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx$$

Dann ist $u_f \in \mathcal{S}'$, denn für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ ist

$$|u_f(\varphi)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot (1+|x|)^{-m} dx \right) p_m(\varphi)$$

- (b) Sei $g(x) := \partial_1 \exp(i \exp(x_1)) = i \exp(x_1) \exp(i \exp(x_1))$. Dann ist (6.1) nicht erfüllbar. Dennoch erzeugt g eine temperierte Distribution, denn mit $f(x) := \exp(i \exp(x_1))$ ist $u_f \in \mathcal{S}'$ (siehe (a)). Daher ist $\partial_1 u_f \in \mathcal{S}'$ und

$$\partial_1 u_f|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = u_g$$

Definition. Seien $(u_k)_k$ in $\mathcal{S}'$ und $u \in \mathcal{S}'$. Wir sagen, dass $(u_k)_k$ gegen u in $\mathcal{S}'$ konvergiert genau dann, wenn $u_k(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}'$ (Konvergenz bezüglich der schwach*-Topologie $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$).

Bemerkung. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\partial^\alpha: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ stetig.

7 Fourier-Transformation

In diesem Abschnitt gilt stets $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition. Die Fourier-Transformation $F: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$

$$Ff(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Es gilt $\|Ff\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1$. Außerdem ist $\widehat{f}$ stetig wegen dominierter Konvergenz.

7.1 Satz. Es gilt $F(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ und $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ist stetig. Für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$F(x^\alpha \varphi) = (i\partial)^\alpha F(\varphi) \qquad F(\partial^\alpha \varphi) = (i\xi)^\alpha F(\varphi)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\varphi}(\xi + he_j) - \widehat{\varphi}(\xi)}{h} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{e^{-(\xi + he_j) \cdot x} - e^{-i\xi x}}{h} dx \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\xi x} (-ix_j) dx \end{aligned}$$

nach dominierter Konvergenz. Also ist $\widehat{\varphi}$ nach der j -ten Variable partiell differenzierbar und $\partial_j \widehat{\varphi} = -iF(x_j \varphi) \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} F(\partial^\alpha \varphi)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \varphi(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \partial_x^\alpha e^{-i\xi x} dx = (-i\xi)^\alpha (-1)^{|\alpha|} \widehat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

Zur Rechtfertigung der partiellen Integration sei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_{B_1(0)} = 1$ und $\psi_k := \psi(\frac{\cdot}{k})$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} \partial^\alpha (\psi_k \varphi)(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha e^{-i\xi x} (\varphi_k \varphi)(x) dx$$

Links gilt $\partial^\alpha (\psi_k \varphi) \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ in $\mathcal{S}$ nach der Leibnizregel und rechts $\psi_k \varphi \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{S}$. Also gilt die zweite Gleichung. Sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Wir zeigen $F(\varphi) \in \mathcal{S}$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist

$$(i\xi)^\alpha (i\partial)^\beta F(\varphi)(\xi) = F(\partial^\alpha [x^\beta \varphi])(\xi)$$

wegen $\partial^\alpha x^\beta \varphi \in \mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $F(\partial^\alpha x^\beta \varphi)$ beschränkt. Zur Stetigkeit von F sei $(\varphi_k)_k$ in $\mathcal{S}$ mit $\varphi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}$. Dann ist $\partial^\alpha x^\beta \varphi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}$ und damit auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach der trivialen Abschätzung zu Beginn ist dann $(i\xi)^\alpha (i\partial)^\beta \widehat{\varphi}_k(\xi) = F(\partial^\alpha x^\beta \varphi_k(x)) \rightarrow 0$ gleichmäßig. Also ist $\widehat{\varphi}_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}$. $\square$

7.2 Korollar (Riemann-Lebesgue-Lemma). Es gilt $\mathcal{F}(L_1(\mathbb{R}^n)) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Es ist $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S} \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann nutze, dass $\mathcal{S}$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $C_0(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen ist bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Beispiel. Sei $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $F\varphi = \varphi$.

7.3 Lemma. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\int \widehat{f} \cdot g = \int f \cdot \widehat{g}$$

Beweis. Fubini. □

7.4 Satz (Fourier-Inversionssatz). Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \cdot e^{ix\xi} d\xi$$

Bemerkung. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist

$$F(e^{i\xi x} f)(\eta) = \widehat{f}(\eta - \xi) \quad \eta \in \mathbb{R}^n$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{S}$ ist nach Lemma 7.3

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \cdot e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) F(e^{i\xi x} \varphi(\xi))(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{\varphi}(y - x) dy$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_k(\xi) = \exp(-\frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{k^2})$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi_k \in \mathcal{S}$ und

$$\widehat{\varphi}_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \frac{|\xi|^2}{k^2}} e^{-ikx \cdot \frac{\xi}{k}} \frac{d\xi}{k^n} \cdot k^n = k^n e^{-\frac{1}{2} |kx|^2}$$

Einerseits konvergiert $\varphi_k \rightarrow 1$ fast überall, daher ist nach majorisierter Konvergenz

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} \varphi_k(\xi) d\xi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} e^{i\xi x} \varphi_k(\xi) d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \underbrace{\widehat{\varphi}_k(y - x)}_{=\widehat{\varphi}_k(x - y)} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \widehat{\varphi}_k(y) dy \end{aligned}$$

Sei $\psi_k(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \widehat{\varphi}_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} k^n \widehat{\varphi}_1(kx) = k^n \psi_1(kx)$ mit

$$\psi_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

Es gilt $\psi_1(x) \geq 0$ und $\int \psi_1 = 1$ und daher folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y) |f(x - y) - f(x)| dy dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(y) \cdot \|f(\bullet - y) - f\|_1 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} k^n \psi_1(ky) \cdot \|f(\bullet - y) - f\|_1 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(z) \cdot \left\| f\left(\bullet - \frac{z}{k}\right) - f \right\|_1 dz \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

nach majorisierter Konvergenz, da die Translation in $L^1(\mathbb{R}^n)$ stetig ist. Also gilt

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = f(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. □

7.5 Korollar. $F: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ ist bijektiv, und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$F^{-1}(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

$F^{-1}: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ ist stetig.

Beweis. Injektivität von $F: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ folgt aus Satz 7.4. Damit ist $F|_{\mathcal{S}}$ injektiv und die Formel für Inverse folgt aus Satz 7.4. Mit $J: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$, $J\varphi(x) := \varphi(-x)$ folgt, dass $F^{-1} = F \circ J$. $\square$

Nun setzen wir F fort auf $\mathcal{S}'$. Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so sind $u_f, u_{\widehat{f}} \in \mathcal{S}'$ und für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$u_{\widehat{f}}(\varphi) = \int \widehat{f}\varphi = \int f\widehat{\varphi} = u_f(\widehat{\varphi})$$

Definiere also $F: \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ durch $Fu(\varphi) := u(F\varphi)$ für $\varphi \in \mathcal{S}$.

7.6 Satz. $F: \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ ist stetig und folgenstetig, bijektiv. Das Inverse $F^{-1}: \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ ist auch stetig und folgenstetig, $F^{-1}u = J\widehat{u}$ mit $Ju(\varphi) := u(J\varphi) = u(\varphi(-\bullet))$. Weiterhin gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $u \in \mathcal{S}'$

$$F(\partial^\alpha u) = (i\xi)^\alpha F(u) \qquad F(x^\beta Ju) = (i\partial)^\beta F(u)$$

Beweis. Folgenstetigkeit: Sei $(u_n)_n$ in $\mathcal{S}'$ mit $u_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}'$. Wegen $F\varphi \in \mathcal{S}$ ist

$$F(u_n)(\varphi) = u_n(F\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Definiere $G: \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ mit $G := J \circ F$. Dass G folgenstetig ist, ist klar. Sei $u \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\begin{aligned} G(Fu)(\varphi) &= (J \circ F)(Fu)(\varphi) = F(Fu)(\varphi(-\bullet)) = Fu(F(\varphi(-\bullet))) \\ &= Fu(\widehat{\varphi(-\bullet)}) = u(\widehat{F(\varphi(-\bullet))}) = u(\varphi(-\bullet)(-\bullet)) = u(\varphi) \end{aligned}$$

Also ist $G \circ F = \mathbb{1}_{\mathcal{S}'}$. $F \circ G = \mathbb{1}_{\mathcal{S}'}$ folgt analog. Stetigkeit folgt mit Netzen oder als Übung. Wir rechnen nach Satz 7.1

$$\begin{aligned} F(\partial^\alpha u)(\varphi) &= (\partial^\alpha u)(\widehat{\varphi}) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \widehat{\varphi}) = i^{|\alpha|} u(F(x^\alpha \varphi)) = u(F((ix)^\alpha \varphi)) = Fu((ix)^\alpha \varphi) \\ &= (ix)^\alpha (Fu)(\varphi) \end{aligned}$$

Die 2. Formel folgt analog. $\square$

Beispiele. (a) Sei $f(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)e^{-cx}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} c > 0$. Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-cx} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c + i\xi}$$

(b) Sei $f := \mathbb{1}_{[0,\infty)}$. Dann ist $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, aber $u_f \in \mathcal{S}'$ und es ist

$$\widehat{u}_f = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \delta_0 - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

(c) $\mathcal{F}(\delta_0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} u_1$.

Bemerkung. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Borelmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann definiert $u_\mu \in \mathcal{S}'$, $u_\mu(\varphi) := \int \varphi d\mu$ eine temperierte Distribution. $\hat{u}_\mu$ ist erzeugt von

$$\hat{\mu}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} d\mu(x)$$

der charakteristischen Funktion von μ . Aus der Bijektivität von $F: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ erhalten wir, dass μ eindeutig durch $\hat{\mu}$ festgelegt ist.

Da $L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'$, können wir F auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ betrachten.

7.7 Satz. $F: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Für $u \in \mathcal{S}'$ ist $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ genau dann wenn $F(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ ist nach Lemma 7.3

$$\int \widehat{\varphi\psi} = \int \widehat{\varphi} F^{-1}(\widehat{\psi}) = \int \varphi \overline{\psi}$$

Damit ist $F: (\mathcal{S}, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathcal{S}, \|\cdot\|_2)$ isometrisch. Eine Fortsetzung erhält man wegen Dichtheit, $F: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist auch isometrisch, bijektiv und es ist auch klar, dass $F_{L^2(\mathbb{R}^n)} \subset F_{\mathcal{S}'}$. $\square$

Definition. Sei $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha J^\alpha$ ein Polynom von $\deg P = m$, in n Variablen. Dann ist $P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ein Differentialoperator der Ordnung m mit konstanten Koeffizienten.

7.8 Korollar. (a) Sei $\mathcal{P}(-i\partial)$ ein partieller Differentialoperator, $u \in \mathcal{S}'$. Dann ist $P(-i\partial)u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $P(\bullet)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(b) Ist $u \in \mathcal{S}'$ und $(1 - \Delta)u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq 2$.

Beweis. (a) Es ist

$$\mathcal{F}(P(-i\partial)u) = P(-i\xi)\mathcal{F}(u) = P(\bullet)\mathcal{F}(u)$$

nach Satz 7.6. Die Behauptung folgt aus Satz 7.7.

(b) Mit $P(\xi) = 1 + |\xi|^2$ folgt, dass $P(\bullet)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ aus (a). Daher ist $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq 2$. Mit (a) folgt $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq 2$. $\square$

7.9 Satz (Hörmander, 1958). Sei $P \neq 0$ ein Polynom. Dann gibt es $v \in \mathcal{S}'$ mit $Pv = u_1$.

8 Tensorprodukt von Funktionenräumen und Distributionen

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$, $g \in L^1_{\text{loc}}(Y)$. Sei $f \otimes g: X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$, $f \otimes g(x, y) := f(x)g(y)$. Dann ist $f \otimes g \in L^1_{\text{loc}}(X \times Y)$ nach Tonelli. Für $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, $\psi \in \mathcal{D}(Y)$ gilt

$$u_{f \otimes g}(\varphi \otimes \psi) = \int f \otimes g \cdot \varphi \otimes \psi(x, y) = \int_X f \varphi \cdot \int_Y g \psi = u_f(\varphi) \cdot u_g(\psi)$$

Wir definieren

$$\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y) := \text{span} \left\{ \varphi \otimes \psi \in \mathcal{D}(X \times Y) \mid \varphi \in \mathcal{D}(X), \psi \in \mathcal{D}(Y) \right\}$$

$\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ ist ein/das Tensorprodukt von $\mathcal{D}(X)$, $\mathcal{D}(Y)$. Ist $c: \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathbb{K}$ bilinear, so ist

$$C \left(\sum_{j=1}^k \varphi_j \otimes \psi_j \right) := \sum_{j=1}^k c(\varphi_j, \psi_j)$$

wohldefiniert.

Definition. Seien $u \in \mathcal{D}(X)'$, $v \in \mathcal{D}(Y)'$. Wir definieren $u \otimes v$ auf $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ durch

$$(u \otimes v) \left(\sum_{j=1}^k \varphi_j \otimes \psi_j \right) := \sum_{j=1}^k u(\varphi_j) v(\psi_j)$$

Dies ist wohldefiniert, denn $(u, v): \mathcal{D}(X) \times \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathbb{K}$, $(\varphi, \psi) \mapsto u(\varphi)v(\psi)$ ist bilinear.

Unser nächstes Ziel ist, $u \otimes v$ auf $\mathcal{D}(X \times Y)$ fortzusetzen. Dazu haben wir zwei Bausteine: $u \otimes v$ muss stetig sein auf $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ und $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ muss dicht liegen in $\mathcal{D}(X \times Y)$.

8.1 Satz. (a) Sei $\chi \in \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$, $v \in \mathcal{D}(Y)'$. Dann ist $x \mapsto v(\chi(x, \bullet))$ in $\mathcal{D}(X)$, und

$$\partial^\alpha (v(\chi(x, \bullet))) = v(\partial^{(\alpha, 0)} \chi(x, \bullet)) \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

(b) Sei $u \in \mathcal{D}(X)'$, $v \in \mathcal{D}(Y)'$. Dann gilt: Für alle $\chi \in \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ ist

$$u \otimes v(\chi) = u(v(\chi(x, \bullet)))$$

Sind $K \subseteq X$ und $L \subseteq Y$ kompakt, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$, sodass

$$|u \otimes v(\chi)| \leq C \sup \left\{ |\partial^{(\alpha, \beta)} \chi(x, y)| : |(\alpha, \beta)| \leq k, (x, y) \in K \times L \right\}$$

für alle $\chi \in \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ mit $\text{supp } \chi \subseteq K \times L$.

Beweis. (a) Ist $\chi = \varphi \otimes \psi$, dann ist $v(\chi(x, \bullet)) = \varphi(x)v(\psi)$. Wegen $\varphi \cdot v(\psi) \in \mathcal{D}(X)$ folgt, dass $v(\chi(x, \bullet))$ eine Testfunktion ist und

$$\partial^\alpha (v(\chi(x, \bullet))) = \partial^\alpha \varphi(x) v(\psi) = v(\partial^\alpha \varphi(x) \psi) = v(\partial^{(\alpha, 0)} \chi(x, \bullet))$$

Der Rest ist Linearität.

- (b) Die 1. Formel ist klar, wenn $\chi = \varphi \otimes \psi$ und damit gilt sie nach Linearität für alle $\chi \in \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$. Es gibt ein $k_u, k_v \in \mathbb{N}_0$ und $C_u, C_v \geq 0$, sodass

$$\begin{aligned} |u(\varphi)| &\leq C_u \sup \left\{ \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty : |\alpha| \leq k_u \right\} & \varphi \in \mathcal{D}_K(X) \\ |v(\varphi)| &\leq C_v \sup \left\{ \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty : |\alpha| \leq k_v \right\} & \varphi \in \mathcal{D}_L(X) \end{aligned}$$

Sei $\chi \in \mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ mit $\text{supp } \chi \subseteq K \times L$. Für $x \in X$ ist $\text{supp } \chi(x, \bullet) \subseteq L$ und $\chi(x, \bullet) \equiv 0$ falls $x \in X \setminus K$. Daher ist

$$\begin{aligned} |u \otimes v(\chi)| &= u(v(\chi(x, \bullet))) \leq C_u \sup \left\{ \underbrace{|\partial^\alpha v(\chi(x, \bullet))|}_{=|v(\partial^{(\alpha,0)} \chi(x, \bullet))|} : |\alpha| \leq k_u, x \in K \right\} \\ &\leq C_u C_v \sup \left\{ |\partial^{(0,\beta)} \partial^{(\alpha,0)} \chi(x, y)| : |\beta| \leq k_v, y \in L, |\alpha| \leq k_u, x \in K \right\} \\ &\leq C \sup \left\{ |\partial^\gamma \chi(x, y)| : |\gamma| \leq k, (x, y) \in K \times L \right\} \end{aligned}$$

wobei $C := C_u C_v$ und $k = k_u + k_v$. □

Ideen für den zweiten Baustein sind folgende: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$ und $\{\rho_k\}_k$ eine δ -Folge, dann ist $\varphi * \rho_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+n})$. Außerdem ist

$$\varphi * \rho_k = \int \varphi(y) \rho_k(\bullet - y) dy \in \overline{\text{span}\{\rho_k(\bullet - y) : y \in \text{supp } \varphi\}}$$

Es ist auch $\rho_k = \rho_k^{(1)} \otimes \rho_k^{(2)}$.

8.2 Satz. Sei $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass $\text{supp } \varphi + B_\delta(0) \subseteq K$. Sei $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \rho \subseteq B_\delta(0)$. Dann ist

$$\varphi * \rho \in \overline{\text{span}\{\rho(\bullet - y) : y \in \text{supp } \varphi\}}^{\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)}$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ und zu $\varepsilon > 0$ wähle ein $\delta' > 0$, sodass für $|x - y| \leq \delta'$ und $|\alpha| \leq m$ gilt

$$|\partial^\alpha \rho(x) - \partial^\alpha \rho(y)| \leq \varepsilon$$

Es gibt $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und Würfel $Q_1, \dots, Q_{n_\varepsilon}$ mit Durchmesser höchstens δ' , disjunkt und $\text{supp } \varphi \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j$, $y^j \in Q_j \cap \text{supp } \varphi$ für $j \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$. Für $|\alpha| \leq m$:

$$\begin{aligned} \left\| \partial^\alpha (\varphi * \rho) - \partial^\alpha \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \int_{Q_j} \varphi(y) dy \cdot \rho(\bullet - y^j) \right\|_\infty &= \\ &= \sup_x \left| \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \int_{Q_j} \varphi(y) \left(\partial^\alpha \rho(x - y) - \partial^\alpha \rho(x - y^j) \right) dy \right| \\ &\leq \sup_x \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \int_{Q_j} |\varphi(y)| \cdot \underbrace{|\partial^\alpha \rho(x - y) - \partial^\alpha \rho(x - y^j)|}_{\leq \varepsilon} dy \\ &\leq \varepsilon \int |\varphi| \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass es eine Folge $(\varphi_k)_k$ im obigen Spann gibt mit $p_m(\varphi_k - \varphi * \rho) \rightarrow 0$. □

8.3 Lemma. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $\text{supp } \varphi \subseteq \overset{\circ}{K}$. Sei (ρ_k) eine δ -Folge in $C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\varphi * \rho_k \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ für große k , und $\varphi * \rho_k \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $\varphi * \rho_k \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ ist klar. Die Konvergenz ist ebenfalls klar, da $\partial^\alpha(\varphi * \rho_k) = (\partial^\alpha \varphi) * \rho_k$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$. $\square$

8.4 Satz. Seien $K \subseteq X \times Y$ kompakt, $\chi \in \mathcal{D}(X \times Y)$ mit $\text{supp } \chi \subseteq \overset{\circ}{K}$. Dann gibt es eine Folge $(\chi_k)_k$ in $\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)$ mit $\chi_k \rightarrow \chi$ in $\mathcal{D}_K(X \times Y)$. Dabei kann $(\chi_k)_k$ in

$$\overline{\text{span}\left\{\varphi \otimes \psi : \varphi \in \mathcal{D}(X), \psi \in \mathcal{D}(Y), \text{supp } \varphi \times \text{supp } \psi \subseteq \overset{\circ}{K}\right\}}$$

gewählt werden.

Beweis. OBdA sei $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$. Sei $(\rho_k)_k$ eine δ -Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ und (σ_k) eine δ -Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\tau_k := (\rho_k \otimes \sigma_k)_k$ eine δ -Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Lemma 8.3 liefert $\chi * \tau_k \rightarrow \chi$ in $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Lemma 8.2 besagt, dass $\chi * \tau_k$ im Abschluss des linearen Spann liegen. $\square$

8.5 Satz. Seien $u \in \mathcal{D}(X)'$, $v \in \mathcal{D}(Y)'$. Dann gibt es ein eindeutiges $w \in \mathcal{D}(X \times Y)'$, sodass $w|_{\mathcal{D}(X) \otimes \mathcal{D}(Y)} = u \otimes v$.

Wir schreiben aufgrund der Eindeutigkeit $w = u \otimes v$.

Beweis (Skizze). Für $K \subseteq X \times Y$ kompakt finden wir $w|_{\mathcal{D}_K(X \times Y)}$. Die Eindeutigkeit ist durch Satz 8.4 gegeben. Unter der Verwendung von 8.1 kann man die Existenz beweisen. $\square$

8.6 Satz. Sei $u \in \mathcal{D}(X)'$, $v \in \mathcal{D}(Y)'$. Dann gilt:

(a) Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(X \times Y)$ ist $u \otimes v(\varphi) = u(v(\varphi(x, \bullet))) = v(u(\varphi(\bullet, y)))$. Es gilt $\text{supp } u \times v \subseteq \text{supp } u \otimes v$.

(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\partial^{(\alpha, \beta)}(u \otimes v) = \partial^\alpha u \otimes \partial^\beta v$$

Beweis (Idee). Der 1. Teil von (a) ist schwer und der zweite Teil und (b) sind dann klar. $\square$

9 Faltung von Distributinoen

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und die durch

$$h(x) := \int |f(y)| \cdot |g(x - y)| \, dy \in [0, \infty]$$

definierte Funktion h sei $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$(f * g)(x) := \int f(y)g(x - y) \, dy = (g * f)(x)$$

und für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt mit Fubini

$$\begin{aligned} u_{f*g}(\varphi) &= \int \int f(y)g(x - y) \, dy \varphi(x) \, dx \\ &= \int \int f(y)g(x - y) \varphi(x) \, dx \, dy \\ &= \int f(y) \int g(x - y) \varphi(x) \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y) \varphi(x + y) \, d(x, y) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y) \eta_k(x, y) \varphi(x + y) \, d(x, y) \end{aligned}$$

für jede Folge $(\eta_k)_k$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ mit

- (i) Für alle $K \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ kompakt existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ folgt, dass $\eta_k \equiv 1$ auf K ist.
- (ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gibt es ein $C_\alpha > 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt, dass $\|\partial^\alpha \eta_k\|_\infty \leq C_\alpha$.

Eine solche Folge bezeichnen wir mit $(\eta_k)_k \succ 1$. In diesem Fall ist

$$u_{f*g}(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_f \otimes u_g(\eta_k \varphi^\Delta)$$

mit $\varphi^\Delta(x, y) := \varphi(x - y)$.

Definition. Zwei Distributionen $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ heißen faltbar, falls für alle $(\eta_k)_k \succ 1$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ der Grenzwert

$$(u * v)(\varphi) := \lim_{k \rightarrow \infty} u \otimes v(\eta_k \varphi^\Delta)$$

existiert, wobei $\varphi^\Delta(x, y) = \varphi(x + y)$. In diesem Fall ist $u * v$ die Faltung von u und v .

Bemerkung. (a) Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl von $(\eta_k)_k$ (zum Beispiel durch “mischen”).

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\eta_k(u \otimes v) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$, daher ist $\varphi \mapsto u \otimes v(\eta_k \varphi^\Delta)$ ein Element von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Satz 3.5 liefert, dass $u * v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Außerdem konvergiert $[\varphi \mapsto u \otimes v(\eta_k \varphi^\Delta)] \rightarrow u * v$ in $\mathcal{D}'$.

Beispiele. (a) Seien $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ wie oben in der Motivation. Dann sind u_f, u_g faltbar. Speziell kann man also $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ falten. Auch, $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $\text{supp } f, \text{supp } g \subseteq [0, \infty)$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sind $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ (p' Hölder-konjugiert zu p), dann ist $f * g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig stetig.

(b) $u = v = u_1$ sind nicht faltbar.

9.1 Satz. Seien $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ mit $\text{supp } v$ kompakt. Dann sind u, v faltbar.

Beweis. Sei $(\eta_k)_k \succ 1$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$u \otimes v(\eta_k \varphi^\Delta) = v\left(u(\eta_k \varphi^\Delta(\bullet, v))\right)$$

(i) Zu zeigen ist, dass $\psi_k: y \mapsto u(\eta_k \varphi^\Delta(\bullet, y))$ für große k eine C^∞ -Funktion ist. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und $h \in (-1, 1)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(u(\eta_k \varphi^\Delta(\bullet, y + he_j)) - u(\eta_k \varphi^\Delta(\bullet, y)) \right) &= u \left(\eta_k \frac{1}{h} \left(\varphi^\Delta(\bullet, y + he_j) - \varphi^\Delta(\bullet, y) \right) \right) \\ &= u \left(\eta_k(\bullet, y) \cdot \underbrace{\frac{1}{h} \left(\varphi(\bullet + y + he_j) - \varphi(\bullet + y) \right)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \partial_j \varphi(\bullet + y) \text{ glm.}} \right) \\ &\quad + u \left(\frac{1}{h} \left(\eta_k(\bullet, y + he_j) - \eta_k(\bullet, y) \right) \varphi(\bullet + y + he_j) \right) \end{aligned}$$

denn

$$\text{supp} \left(\frac{1}{h} \left(\varphi(\bullet + y + he_j) - \varphi(\bullet + y) \right) \right) \subseteq \text{supp } \varphi(\bullet + y) + \overline{B}_1(0)$$

Auch ist

$$\partial^\alpha \left(\frac{1}{h} \left(\varphi(\bullet + y + he_j) - \varphi(\bullet + y) \right) \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \partial^\alpha \partial_j \varphi(\bullet + y)$$

gleichmäßig. Daher ist die Konvergenz in $\mathcal{D}$. Weiter ist

$$\frac{1}{h} \left(\eta_k(\bullet, y + he_j) - \eta_k(\bullet, y) \right) \cdot \varphi(\bullet + y + he_j) = 0$$

auf $\text{supp } \varphi - y + \overline{B}_1(0)$ für große k . Also ist

$$\frac{1}{h} \left(u(\eta_k \varphi^\Delta(\bullet, y + he_j)) - u(\eta_k \varphi^\Delta(\bullet, y)) \right) \xrightarrow[k \text{ groß}]{h \rightarrow 0} u(\eta_k (\partial_j \varphi)^\Delta)(\bullet, y)$$

Der Rest ist Induktion.

(ii) Wir zeigen, dass $(\psi_k)_k$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Sei $y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\psi_k(y) = u(\eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y))$$

Wegen $\text{supp}(\psi_k(y)) \subseteq \text{supp } \varphi - y$ kompakt gibt es ein $k_y \in \mathbb{N}$, sodass für $k \geq k_y$ gilt, dass $\eta_k = 1$ auf $(\text{supp } \varphi - y) \times \{y\}$. Dann ist $\psi_k(y) = u(\varphi(\bullet + y)) =: u(\psi(y))$ für $k \geq k_y$. Analog zu (i) ist $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha \psi_k \rightarrow \partial^\alpha \psi$ punktweise für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $(\text{supp } \varphi - y) \times \{y\} \subseteq (\text{supp } \varphi - K) \times K$ für $y \in K$. Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt, dass $\eta_k = 1$ auf $(\text{supp } \varphi - K) \times K$ ist. Für $k \geq k_0$ ist daher $\psi_k(y) = \psi(y)$ für alle $y \in K$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist auch $\partial^\alpha \psi_k = \partial^\alpha \psi$ auf K . $\square$

Bemerkung. Ist $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $u * u_\varphi(x) = u(\varphi(x - \bullet))$ und es gilt $u * u_\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

9.2 Satz. Seien $(u_k)_k, (v_k)_k$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und $u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$.

- (a) Sind u, v faltbar, so ist $u * v = v * u$.
- (b) Ist $u_k \rightarrow u$ in $\mathcal{D}'$ und $\text{supp } v$ kompakt, so ist $u_k * v \rightarrow u * v$ in $\mathcal{D}'$.
- (c) Ist $v_k \rightarrow v$ in $\mathcal{D}'$ und existiert ein $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $\text{supp } v_k \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $u * v_k \rightarrow u * v$ in $\mathcal{D}'$.
- (d) Sind u, v faltbar und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so sind $\partial^\alpha u$ und v faltbar und $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v$.

Beweis. (a) Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned} u * v(\varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u \otimes v(\eta_k \varphi^\Delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(v(\eta_k \varphi^\Delta(x, \bullet))) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(v(\eta_k(x, \bullet) \varphi(x + \bullet))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} u(v(\tilde{\eta}_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y))) = \lim_{k \rightarrow \infty} v \otimes u(\tilde{\eta}_k \varphi^\Delta) \end{aligned}$$

mit $\tilde{\eta}_k(x, y) = \eta_k(y, x)$.

(b) Sei $(\eta_\ell)_\ell \succ 1$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$u_k * v(\varphi) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_k \otimes v(\eta_\ell \varphi^\Delta) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_k(v(\eta_\ell(x, \bullet) \varphi(x + \bullet)))$$

Setze $\psi_\ell: x \mapsto v(\eta_\ell(x, \bullet) \varphi(x + \bullet))$. Wie im Beweis von Satz 9.1 (i) ist $\psi_\ell \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei

$$K := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \text{supp } v \cap (-x + \text{supp } \varphi) \neq \emptyset\}}$$

Dann ist K kompakt und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ ist $\psi_\ell(x) = 0$. Damit ist $(\psi_\ell)_k$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Es gibt ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\ell \geq \ell_0$ gilt, dass $\eta_\ell = 1$ auf $K \times (-K + \text{supp } \varphi)$. Damit ist $\psi_\ell(x) = v(\varphi(x + \bullet))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\ell \geq \ell_0$. Dies liefert $u_k(\psi_\ell) \rightarrow u(\psi_\ell)$ gleichmäßig in ℓ . Damit sind die Grenzwerte vertauschbar. Also gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k * v)(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_k(\psi_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\psi_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} u(\psi_\ell) = u * v(\varphi)$$

(c) Analog zu (b).

(d) Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ und sei $(\eta_k)_k \succ 1$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} v \left(u \left(\eta_k(\bullet, y) \partial_j \varphi(\bullet + y) \right) \right) &= v \left(u \left(\partial_j \left(\eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y) \right) \right) \right) \\ &\quad - v \left(u \left(\partial_j \eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y) \right) \right) \\ &= -v \left(\partial_j u \left(\eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet, y) \right) \right) \\ &\quad - v \left(u \left(\partial_j \eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y) \right) \right) \end{aligned}$$

Da auch $(\eta_k + \partial_j \eta_k) \succ 1$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \partial_j(u * v)(\varphi) &= -(u * v)(\partial_j \varphi) = -\lim_{k \rightarrow \infty} v(u(\eta_k(\bullet, y) \partial_j \varphi(\bullet + y))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} v(\partial_j u(\eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y))) + \lim_{k \rightarrow \infty} v(u((\eta_k + \partial_j \eta_k)(\bullet, y) \varphi(\bullet + y))) \\ &\quad - \lim_{k \rightarrow \infty} v(u(\eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\partial_j u) \otimes v(\eta_k \varphi^\Delta) + (u * v)(\varphi) - (u * v)(\varphi) \end{aligned}$$

Also sind ∂_j und v faltbar und $\partial_j(u * v) = (\partial_j u) * v$. Der Rest ist Induktion. $\square$

9.3 Satz. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'^m$ und $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$. Sei $g := \tilde{u}(y \mapsto f(\bullet - y))$ die Fortsetzung gemäß Satz 3.3. Dann ist g stetig und $u * u_f = u_g$.

9.4 Lemma. Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Sei $(\eta_k)_k \succ 1$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y) dy \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\bullet + y) dy$$

bezüglich $\|\cdot\|_m$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\bullet + y) dy \right| \\ & \leq \int_{\text{supp } f} |f(y)| \cdot |\varphi(\bullet + y)| \cdot |\eta_k(\bullet, y) - 1| dy \end{aligned}$$

Es gibt ein $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit $\varphi(x + y) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, $y \in \text{supp } f$. Es gibt daher ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$, $\eta_k = 1$ auf $K \times \text{supp } f$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

9.5 Lemma. Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'^m$ und $f \in C_c^m(\mathbb{R}^{2n})$. Dann gilt

$$\tilde{u}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\bullet, y) dy\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(f(\bullet, y)) dy$$

Beweis. Da $\partial^\alpha f$ gleichmäßig stetig ist, $|\alpha| \leq m$ und $\text{supp } f$ kompakt ist, ist die endliche Summe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \partial^\alpha f(\bullet, kh) h^n \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(\bullet, y) dy$$

gleichmäßig für alle $|\alpha| \leq m$. Da $y \mapsto \tilde{u}(f(\bullet, y))$ stetig ist, und $\tilde{u}$ auch $\|\cdot\|_m$ -stetig ist, ist

$$\tilde{u}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\bullet, y) dy\right) \xleftarrow{h \rightarrow 0} \tilde{u}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(\bullet, kh) h^n\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \tilde{u}(f(\bullet, kh) h^n) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(f(\bullet, y)) dy$$

$\square$

Beweis von Satz 9.3. Für $|\alpha| \leq m$ gilt, dass $\partial^\alpha f$ gleichmäßig stetig auf Kompakta ist. Damit ist für $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(x - \bullet) - f(x_0 - \bullet)\|_m \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Aus Satz 3.5 erhalten wir, dass $\tilde{u}$ auch $\|\cdot\|_m$ -stetig ist. Daher ist

$$|g(x) - g(x_0)| = |\tilde{u}(f(x - \bullet)) - \tilde{u}(f(x_0 - \bullet))| \leq C \cdot \|f(x - \bullet) - f(x_0 - \bullet)\|_m \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Damit ist g stetig. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} u * u_f(\varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u \otimes u_f(\eta_k \varphi^\Delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(u_f(\eta_k \varphi^\Delta(x, \bullet))) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} u\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \eta_k(\bullet, y) \varphi(\bullet + y) dy\right) = \tilde{u}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(\bullet + y) dy\right) \\ &= \tilde{u}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y - \bullet) \varphi(y) dy\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(f(y - \bullet)) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

nach Lemma 9.4 und 9.5. $\square$

Bemerkung. Ein analoges Resultat gilt für $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'^m$ und $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$.

10 Fundamentallösungen

Definition. Sei $P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ ein Polynom. Dann ist $P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ein Differentialoperator der Ordnung m mit konstanten Koeffizienten. $E \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ mit $P(\partial)E = \delta_0$ heißt Fundamentallösung von $P(\partial)$.

Bemerkung. Sei E eine Fundamentallösung von $P(\partial)$ und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ mit E faltbar. Dann ist

$$P(\partial)(E * f) = (P(\partial)E) * f = \delta_0 * f = f$$

Also ist $u := E * f$ eine Lösung des inhomogenen Problems $P(\partial)u = f$.

Beispiel. In $n = 1$ betrachte $P(\partial) = \partial$. Sei $E = u_H$ mit $H(x) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Die Fundamentallösung des Δ .

Zur Existenz von Fundamentallösungen:

10.1 Satz (Ehrenpreis 1954/55, Malgrange 1955/56). *Sei P ein Polynom in $\mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$, $P \neq 0$. Dann besitzt $P(\partial)$ eine Fundamentallösung.*

Zum Beweis nach Wagner 2009 sind 2 Lemmata nötig.

10.2 Lemma. *Sei P ein Polynom in $\mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$.*

(a) *Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$. Dann ist $P(\partial)(e^{i\zeta x}u) = e^{i\zeta x}(P(\partial + \zeta)u)$.*

(b) *Sei $u \in \mathcal{S}'$. Dann ist $P(\partial)F^{-1}u = F^{-1}(P(i\xi)u)$.*

(c) *Seien $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$. Dann ist*

$$(e^{\zeta x}u) * (e^{\zeta x}v) = e^{\zeta x}(u * v)$$

Beweis. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definiert durch $f(x) := e^{\zeta x}$.

(a) Es genügt zu zeigen, dass die Behauptung für $P(x) = x_1$ gilt. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_1(fu)(\varphi) &= -(fu)(\partial_1\varphi) = -u(f\partial_1\varphi) = -u(\partial_1(f\varphi) - (\partial_1f)\varphi) \\ &= \partial_1u(f\varphi) + u(\zeta_1f\varphi) = fP(\partial + \zeta)u(\varphi) \end{aligned}$$

(b) Folgt aus Satz 7.6. Es sind u und v faltbar nach Satz 9.1. Damit sind auch fu und fv faltbar, denn $fv \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned} ((fu) * (fv))(\varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (fu) \otimes (fv)(\eta_k \varphi^\Delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} (fu) \left[(fv)(\eta_k \varphi^\Delta(x, \bullet)) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} u \left(f \cdot v(\eta_k(x, \bullet)f(\bullet)\varphi^\Delta(x, \bullet)) \right) \end{aligned}$$

Andererseits ist wegen $f^\Delta(x, \bullet) = f(x) \cdot f(\bullet)$:

$$\begin{aligned} f(u * v)(\varphi) &= u * v(f\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u \left(v(\eta_k(x, \bullet)f^\Delta(x, \bullet)\varphi^\Delta(x, \bullet)) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} u \left(v(\eta_k(x, \bullet)f(x)f(\bullet)\varphi^\Delta(x, \bullet)) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} u \left((fv)(\eta_k(x, \bullet)f(\bullet)\varphi^\Delta(x, \bullet)) \right) \end{aligned} \quad \square$$

10.3 Lemma. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Seien $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, sodass

$$\sum_{j=0}^m a_j \lambda_j^k = \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, m-1 \\ 1 & k = m \end{cases}$$

Dann gilt $a_j = \prod_{k \neq j}^m (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$ für alle $j = 0, \dots, m$.

Beweis. In Matrixschreibweise ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \cdots & \lambda_m^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^m & \cdots & \lambda_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die Vandermonde-Determinante von $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ ungleich Null ist, sind $a_0, \dots, a_m$ eindeutig. Sei $p(z) = \prod_{j=0}^m (z - \lambda_j)$. Sei $f_k(z) := z^k$. Dann sind p, f_k holomorph, λ_j einfache Nullstellen von p . Es ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f_k}{p}, \lambda_j\right) = \frac{f_k(\lambda_j)}{p'(\lambda_j)} = \frac{\lambda_j^k}{p'(\lambda_j)}$$

für $j = 0, \dots, m, k = 0, \dots, m$. Der Residuensatz liefert

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \operatorname{Res}\left(\frac{f_k}{p}, \lambda_j\right) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|z|=N} \frac{f_k(z)}{p(z)} dz \\ &= \begin{cases} 0 & k = 0, \dots, m-1 \\ 1 & k = m \end{cases} \end{aligned}$$

Es folgt $a_j = \frac{1}{p'(\lambda_j)}$ nach Eindeutigkeit für $j = 0, \dots, m$. Wegen

$$p'(\lambda_j) = \prod_{k \neq j}^m (\lambda_j - \lambda_k)$$

□

beendet das den Beweis.

Beweis von Satz 10.1. Sei $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha$. Sei $P_m(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha$ und sei $\eta \in \mathbb{R}^n$, sodass $P_m(\eta) \neq 0$. Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und betrachte die Zahlen $a_j := \prod_{k \neq j}^m (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$ für $j = 0, \dots, m$. Zu zeigen ist, dass

$$E(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(P_m(2\eta))} \sum_{j=0}^m a_j e^{\lambda_j \eta x} F^{-1} \left[\frac{\overline{P(i\xi + \lambda_j \eta)}}{P(i\xi + \lambda_j \eta)} \right] (x)$$

eine Fundamentallösung definiert.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $N := \{\xi \in \mathbb{R}^n : P(i\xi + \lambda \eta) = 0\}$ eine Nullmenge, denn ohne Einschränkung gilt $P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0$. Für $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist

$$N_{\hat{\xi}} := \{\xi_1 \in \mathbb{R} : P(i(\xi_1, \hat{\xi}) + \lambda \eta) = 0\}$$

$P(\mathbf{i}(\xi_1, \widehat{\xi}) + \lambda\eta) = 0$ ist ein Polynom in ξ_1 und nicht identisch 0. Also ist $N_{\widehat{\xi}}$ endlich und damit nach Fubini:

$$\int_N d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\int_{N_{\widehat{\xi}}} d\xi_1 \right) d\widehat{\xi} = 0$$

Damit ist

$$u := \frac{\overline{P(\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta)}}{P(\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'$$

Es folgt $E \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$.

(b) Für $u \in \mathcal{S}'$ und $\zeta \in \mathbb{C}^n$ ist nach Lemma 10.2 (a) und (b)

$$P(\partial) \left(e^{\zeta x} F^{-1} u \right) = e^{\zeta x} P(\partial + \zeta) (F^{-1} u) = e^{\zeta x} F^{-1} \left(P(\mathbf{i}\xi + \zeta) u \right)$$

Mit u aus (a) ist nun

$$\begin{aligned} P(\partial) \left(e^{\lambda\eta x} F^{-1} \left(\frac{\overline{P(\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta)}}{P(\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta)} \right) \right) &= e^{\lambda\eta x} F^{-1} \left(\overline{P(\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta)} \right) \\ &= e^{\lambda\eta x} F^{-1} \left(\overline{P}(-\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta) \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

Es ist nach 10.2 (b) nun

$$F^{-1}(\overline{P}(-\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta) \cdot 1) = \overline{P}(-\partial + \lambda\eta) F^{-1}(u_1) = \overline{P}(-\partial + \lambda\eta) (2\pi)^{n/2} \delta_0$$

Es folgt insgesamt nach Lemma 10.2 (a)

$$\begin{aligned} P(\partial) \left(e^{\lambda\eta x} F^{-1} \left(\frac{\overline{P(\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta)}}{P(\mathbf{i}(\bullet) + \lambda\eta)} \right) \right) &= e^{\lambda\eta x} \overline{P}(-\partial + \lambda\eta) ((2\pi)^{n/2} \delta_0) \\ &= (2\pi)^{n/2} \overline{P}(-\partial + 2\lambda\eta) \underbrace{(e^{\lambda\eta x} \delta_0)}_{=\delta_0} \\ &= (2\pi)^{n/2} \overline{P}(-\partial + 2\lambda\eta) \delta_0 \\ &= (2\pi)^{n/2} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \bar{c}_\alpha (-\partial + 2\lambda\eta)^\alpha \right) \delta_0 \\ &= (2\pi)^{n/2} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \bar{c}_\alpha \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-\partial)^\beta (2\lambda\eta)^{\alpha-\beta} \right) \delta_0 \\ &= (2\pi)^{n/2} \left(\sum_{|\alpha|=m} \bar{c}_\alpha (2\lambda\eta)^\alpha \delta_0 + \sum_{|\alpha| < m} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \cdots + \sum_{|\alpha|=m} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha, \beta \neq 0} \cdots \right) \\ &= (2\pi)^{n/2} \lambda_m \overline{P_m(2\eta)} \delta_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k T_k \end{aligned}$$

mit $T_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$ (da Summe von Ableitungen von δ_0). Damit folgt aus Lemma 10.3, dass $P(\partial)E = \delta_0$. $\square$

Sind Fundamentallösungen sogar besser als $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$?

10.4 Satz. Sei P ein Polynom in $\mathbb{R}^n$, $P \neq 0$. Dann besitzt $P(-\mathbf{i}\partial)$ eine temperierte Fundamentallösung.

Beweis. Aus Satz 7.9 folgt, dass es ein $v \in \mathcal{S}'$ gibt mit $Pv = u_1$. Dann ist

$$u := F^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}v\right) \in \mathcal{S}'$$

und

$$F\left(P(-i\delta)u\right) = P(\bullet) \cdot F(u) = P(\bullet) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}u_1 = F(\delta_0) \quad \square$$

Bemerkung. Es gilt offenbar $u * \delta_0 = u$, $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$. Damit ist

$$P(\partial)u = P(\partial)(u * \delta_0) = u * (P(\partial)\delta_0) = (P(\partial)\delta_0) * u$$

Daher sind auch Fundamentallösungen für Faltungen möglich. Zu $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ findet sich ein $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, mit v faltbar, so dass $v * u = \delta_0$.

Beispiel. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $P_{k+1}(\xi) := \xi_1^{k+1} \dots \xi_n^{k+1}$. Sei

$$E_k(x) := \begin{cases} \frac{(x_1 \dots x_n)^k}{(k!)^n} & x_1, \dots, x_n > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist u_{E_k} eine Fundamentallösung zu $P_{k+1}(\partial)$. Denn für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\partial)u_{E_k}(\varphi) &= (-1)^{(k+1)n}u_{E_k}(P(\partial)\varphi) \\ &= (-1)^{(k+1)n} \int_{\mathbb{R}^n} E_k \partial_1^{k+1} \dots \partial_n^{k+1} \varphi \\ &= (-1)^{(k+1)n} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{x_1^k}{k!} \dots \frac{x_n^k}{k!} \partial_n^{k+1} \dots \partial_1^{k+1} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= (-1)^{(k+1)n} (-1)^{kn} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \partial_n \dots \partial_1 \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 \\ &= (-1)^{(2k+1)n} (-1)^n \varphi(0, \dots, 0) = \delta_0(\varphi) \end{aligned}$$

10.5 Satz. Sei $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$. Dann gibt es ein $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$, sodass $\partial_1^{m+2} \dots \partial_n^{m+2} u_f = u$.

Beweis. Mit der Notation aus dem Beispiel sei $v := u_{E_{m+1}} * u$. Dann ist $P_{m+2}(\partial)v = u$. Aus Satz 4.3 und Satz 4.4 gibt es ein $K \subseteq \Omega$ kompakt, $m \in \mathbb{N}_0$ und $C \geq 0$

$$|u(\varphi)| \leq C \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m\} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Analog zum Beweis von Satz 9.3 gibt es ein $f \in C(\mathbb{R})$ mit $u_f = v$. $\square$

10.6 Satz. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$. Dann gibt es $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ in $C(\Omega)$, sodass $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \partial^\alpha u_{f_\alpha}$ gilt.

Beweis. Sei $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ eine Zerlegung der Eins. Sei $(\chi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\chi_i = 1$ auf $\text{supp } \psi_i$. Ohne Einschränkung ist $(\chi_i)_i$ lokal endlich. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist

$$u(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i u(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i \psi_i u(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i u(\psi_i)$$

Da $\chi_i u \in \mathcal{E}(\Omega)'$ ist, liefert Satz 10.5 (nach Fortsetzung auf $\mathbb{R}^n$) ein $f_i \in C(\Omega)$, sodass $\chi_i u = \partial^{\alpha_i} u_{f_i}$ für ein gewisses $\alpha_i \in \mathbb{N}_0^n$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned}
u(\varphi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \partial^{\alpha_i} u_{f_i}(\psi_i \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{|\alpha_i|} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \partial^{\alpha_i}(\psi_i \varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{|\alpha_i|} \sum_{0 \leq \alpha \leq \alpha_i} \int_{\mathbb{R}^n} \binom{\alpha_i}{\alpha} f_i \partial^{\alpha_i - \alpha} \psi_i \partial^{\alpha} \varphi \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{0 \leq \alpha \leq \alpha_i} (-1)^{|\alpha_i|} \int_{\mathbb{R}^n} \binom{\alpha_i}{\alpha} (-1)^{|\alpha_i| - |\alpha|} f_i \cdot \partial^{\alpha_i - \alpha} \psi_i \cdot \partial^{\alpha} \varphi \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f_{i,\alpha} \partial^{\alpha} \varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{i=1}^{\infty} \partial^{\alpha} u_{f_{i,\alpha}}(\varphi)
\end{aligned}$$

für geeignete $f_{i,\alpha} \in C_c(\Omega)$. Nun setze $f_{\alpha} := \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha} \in C(\Omega)$ (lokal endliche Summe dank $(\psi_i)_i$). □

11 Sobolevräume, Definitionen und erste Eigenschaften

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Seien $f, g \in L_{\text{loc}}(\Omega)$, dann ist $\partial^\alpha f = g$ per Definition genau dann wenn $\partial^\alpha u_f = u_g$.

Definition. Sei $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$.

$$W_p^m(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{m,p}^p := \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p^p \quad p < \infty$$

bzw.

$$\|f\|_{m,\infty} := \max \left\{ \|\partial^\alpha f\|_\infty : |\alpha| \leq m \right\}$$

11.1 Satz. Seien $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

- (a) $W_p^m(\Omega)$ ist ein Banachraum.
- (b) Falls $p \in [1, \infty)$, so ist $W_p^m(\Omega)$ separabel.
- (c) Falls $p \in (1, \infty)$, so ist $W_p^m(\Omega)$ reflexiv.
- (d) $W_2^m(\Omega)$ ist ein Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g)_{W_2^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f \cdot \overline{\partial^\alpha g}$$

Beweis. Sei

$$J: W_p^m(\Omega) \longrightarrow \left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega) \right)_{\ell^p} \quad f \longmapsto (\partial^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}$$

Dann ist J linear, isometrisch.

(a) Wir zeigen, dass $J(W_p^m(\Omega))$ abgeschlossen ist. Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $W_p^m(\Omega)$ mit

$$Jf_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$$

Zu zeigen ist, dass für alle $|\alpha| \leq m$ die Gleichung $\partial^\alpha f_0 = f_\alpha$ gilt. Für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und $k \in \mathbb{N}$ und für $|\alpha| \leq m$ ist

$$\int f_\alpha \varphi \xleftarrow{k \rightarrow \infty} \int \partial^\alpha f_k \cdot \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int f_k \cdot \partial^\alpha \varphi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int f_0 \cdot \partial^\alpha \varphi$$

Damit ist $(\partial^\alpha f_0 = f_\alpha \in L^p(\Omega))$.

- (b) $\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)_{\ell^p}$ ist separabel.
- (c) $\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)_{\ell^p}$ ist reflexiv
- (d) klar.

□

11.2 Satz. (a) Seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\partial^\alpha(\rho * f) = \rho * \partial^\alpha f$$

(b) Ist $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$, und $f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$. Sei (ρ_k) in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine δ -Folge. Dann ist $\rho_k * f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ in $W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (a) Satz 9.1, 9.2 (a), (d). Es ist

$$\partial^\alpha(u_\rho * u_f) = \partial^\alpha(u_f * u_\rho) = (\partial^\alpha u_f) * u_\rho = u_{\partial^\alpha f} * u_\rho = u_{\rho * \partial^\alpha f}$$

Also ist $\partial^\alpha(\rho * f) = \rho * \partial^\alpha f$ fast überall und nach Stetigkeit überall.

(b) Für $|\alpha| \leq m$ ist $\partial^\alpha(\rho_k * f) = \rho_k * \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Also

$$\partial^\alpha(\rho_k * f) = \rho_k * \partial^\alpha f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \partial^\alpha f$$

in $L^p(\Omega)$. □

11.3 Satz. Sei $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ dicht in $W_p^m(\Omega)$.

Bemerkung. Für $p \in [1, \infty]$ und $m \in \mathbb{N}_0$ kann man

$$H_p^m(\Omega) := \overline{\left\{ f \in C^m(\Omega) : \|f\|_{m,p} < \infty \right\}}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

definieren, wobei hier die Vervollständigung gemeint ist. Satz 11.3 liefert $H_p^m(\Omega) = W_p^m(\Omega)$ (Meyers, Serrin, 1964, $H = W$).

Bemerkung. Sei $p = 2$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$W_m^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\cdot|^2)^{m/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Beweis. Sei $(\Omega_k)_k$ die Standardausschöpfung von Ω , $f \in W_p^m(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Sei $(\rho_k)_k$ eine glatte Zerlegung der Eins auf Ω , sodass $\text{supp } \rho_k \subseteq \Omega_{k+1} \setminus \Omega_{k-1}$ (siehe Satz 1.2). Sei $(\varphi_k)_k$ in $C_c^\infty(\Omega)$ eine δ -Folge mit $\text{supp } \varphi_k \subseteq B(0, \frac{1}{(k+1)(k+2)})$ und

$$\|\varphi_k * (\rho_k f) - \rho_k f\|_{m,p} \leq \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es folgt $\text{supp } \varphi_k * (\rho_k f) \subseteq \Omega_{k+2} \setminus \Omega_{k-2}$ und

$$g_k := \sum_{j=1}^k \varphi_j * (\rho_j f) \in C^\infty(\Omega)$$

Damit ist

$$g := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j * (\rho_j f) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$$

lokal endlich. Es gilt

$$\|f - g\|_{p,m} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j * (\rho_j f) - \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j f \right\|_{m,p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\|\varphi_j * (\rho_j f) - \rho_j f\|_{m,p}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2^j}} \leq \varepsilon \quad \square$$

Definition. Für $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$W_{p,0}^m(\Omega) := \overline{\{f \in W_p^m(\Omega) : \text{supp } f \text{ kompakt}\}}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

Im Fall $p < \infty$ gilt $W_{p,0}^m(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$.

Bemerkung. (a) $W_{p,0}^m(\Omega)$ ist ein Banachraum.

(b) $1 \leq p < \infty$ und $m = 0$ impliziert $W_{p,0}^0(\Omega) = L^p(\Omega) = W_p^0(\Omega)$.

(c) Für $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ ist $W_{p,0}^m(\mathbb{R}^n) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$

11.4 Satz (Poincaré-Ungleichung). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es $C > 0$, sodass

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \|Df\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall f \in W_{p,0}^1(\Omega)$$

Durch $\|Du\|_p$ wird also eine Norm auf $W_p^1(\Omega)$ definiert, die äquivalent zu $\|\cdot\|_{1,p}$ ist.

Beweis. Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sodass¹ $\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : a < x_1 < b\}$. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit 0 auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Für $x \in \Omega$ gilt nach Hölder mit p und q konjugiert:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^p &= |\varphi(x) - \varphi(a, x_2, \dots, x_n)|^p = \left| \int_a^{x_1} \partial_1 \varphi(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi \right|^p \\ &\leq (x_1 - a)^{\frac{p}{q}} \int_a^{x_1} |\partial_1 \varphi(\xi, x_2, \dots, x_n)|^p d\xi \\ &\leq (b - a)^{\frac{p}{q}} \int_a^b |\partial_1 \varphi(\xi, x_2, \dots, x_n)|^p d\xi \end{aligned}$$

Es folgt mit Tonelli

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi(x)|^p dx &\leq (b - a)^{\frac{p}{q}} \int_\Omega \int_a^b |\partial_1 \varphi(\xi, x_2, \dots, x_n)|^p d\xi dx \\ &\leq (b - a)^{\frac{p}{q}+1} \int_{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}} \int_a^b |\partial_1 \varphi(\xi, x_2, \dots, x_n)|^p d\xi d(x_2, \dots, x_n) \\ &= (b - a)^p \|\partial_1 \varphi\|_p^p \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung aus Dichtheit. □

Nun beschäftigen wir uns mit Dualität und den Räumen $W_p^{-m}(\Omega)$.

11.5 Lemma. Seien $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt mit p und q Hölder-konjugiert:

$$\left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega) \right)'_{\ell^p} = \left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q(\Omega) \right)_{\ell^q}$$

Beweis. Folgt aus Dualität von $L^p(\Omega)$. □

11.6 Satz. Seien $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ und q Hölder-konjugiert zu p . Sei $\ell \in W_p^m(\Omega)'$.

¹Beschränktheit in eine Richtung genügt

(a) Es gibt $(g_\alpha) \in (\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q(\Omega))_{\ell^q}$, sodass

$$\ell(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f \cdot g_\alpha \quad f \in W_p^m(\Omega)$$

(b) Es gilt

$$\|\ell\|_{W_p^m(\Omega)'} = \inf \left\{ \|(g_\alpha)\|_{(\bigoplus L^q)_{\ell^q}} : (g_\alpha) \in \left(\bigoplus L^q \right)_{\ell^q}, \right. \\ \left. \ell(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int \partial^\alpha f \cdot g_\alpha \quad \forall f \in W_p^m(\Omega) \right\}$$

Beweis. (a) Sei $J: W_p^m(\Omega) \rightarrow (\bigoplus L^p)_{\ell^p}$, $Jf := (\partial^\alpha f)_{\alpha \leq m}$. Dann ist $J: W_p^m(\Omega) \rightarrow R(J)$ ein isometrischer Isomorphismus. Definiere

$$\ell_0: R(J) \rightarrow \mathbb{K} \quad \ell_0(Jf) := \ell(f) \quad f \in W_p^m(\Omega)$$

Dann ist ℓ_0 stetig, linear mit $\|\ell_0\| = \|\ell\|$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung $\tilde{\ell} \in (\bigoplus L^p)'_{\ell^p}$ von ℓ_0 mit $\|\ell_0\| = \|\tilde{\ell}\|$. Aus Lemma 11.5 erhalten wir genau ein $(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in (\bigoplus L^q)_{\ell^q}$ mit

$$\tilde{\ell}((f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} f_\alpha g_\alpha$$

für alle $(f_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in (\bigoplus L^p)_{\ell^p}$. Für alle $f \in W_p^m(\Omega)$ gilt daher

$$\ell(f) = \ell_0(Jf) = \tilde{\ell}(Jf) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f g_\alpha$$

und $\|\ell\| = \|\ell_0\| = \|\tilde{\ell}\| = \|(g_\alpha)\|_{(\bigoplus L^q)_{\ell^q}}$. Damit ist auch für alle $(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in (\bigoplus L^q)_{\ell^q}$ mit $\ell(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f g_\alpha$

$$\|(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\| \geq \|\ell\| \quad \square$$

Bemerkung. Für $p \in (1, \infty)$ ist tatsächlich $(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ eindeutig (folgt aus gleichmäßiger Konvexität von L^p und L^q).

11.7 Korollar. Seien $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Sei $\ell \in W_p^m(\Omega)'$. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ mit $u(\varphi) = \ell(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Beweis. Sei $(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in (\bigoplus L^q(\Omega))_{\ell^q}$ wie in Satz 11.6. Setze $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ durch

$$u := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha u_{g_\alpha}$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha u_{g_\alpha}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int g_\alpha \partial^\alpha \varphi = \ell(\varphi) \quad \square$$

Bemerkung. $\ell \in W_p^m(\Omega)'$ ist eine Fortsetzung von Distributionen auf $W_p^m(\Omega)$.

Es gilt tatsächlich eine „Umkehrung“ von Korollar 11.7.

Definition. Seien $p \in [1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$ und q Hölder konjugiert zu p . Dann definiere $W_p^{-m}(\Omega) := W_{p,0}^m(\Omega)'$.

11.8 Satz. Seien $1 < q \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$W_q^{-m}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}(\Omega)' : \exists (g_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in \left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q(\Omega) \right)_{\ell^q} : u = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha u_{g_\alpha} \right\}$$

und

$$\|\ell\|_{W_q^{-m}(\Omega)} = \inf \left\{ \|(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\|_{\left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q \right)_{\ell^q}} : \ell = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha u_{g_\alpha} \right\}$$

für $\ell \in W_q^{-m}(\Omega)$.

Beweis. $(\subseteq)$ Folgerung 11.7, Normgleichheit aus Satz 11.6.

$(\supseteq)$ Sei $(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in \left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q \right)_{\ell^q}$ mit $u = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha u_{g_\alpha}$. Sei $f \in W_{p,0}^m(\Omega)$. Es gibt (φ_k) in $\mathcal{D}(\Omega)$, sodass $\varphi_k \rightarrow f$ in $W_p^m(\Omega)$, damit ist

$$\begin{aligned} |u(\varphi_k) - u(\varphi_\ell)| &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} |u_{g_\alpha}(\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi_\ell))| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi_\ell)\|_{L^p} \cdot \|g_\alpha\|_{L^q} \\ &\leq C \|\varphi_k - \varphi_\ell\|_{m,p} \cdot \|(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\|_{\left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q \right)_{\ell^q}} \xrightarrow{k, \ell \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Setze also $\ell(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(\varphi_k)$ (wohldefiniert). Damit ist $\ell: W_p^m(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ linear und

$$\begin{aligned} |\ell(f)| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |u(\varphi_k)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_{m,p} \cdot \|(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\|_{\left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q \right)_{\ell^q}} \\ &= \|f\|_{m,p} \cdot \|(g_\alpha)_{|\alpha| \leq m}\|_{\left(\bigoplus_{|\alpha| \leq m} L^q \right)_{\ell^q}} \quad \square \end{aligned}$$

11.9 Satz. Sei $1 < q \leq \infty$. Dann ist $W_q^{-m}(\Omega)$ separabel. Ist $q \in (1, \infty)$, so ist $W_q^{-m}(\Omega)$ reflexiv.

12 Zur Geometrie offener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen. Viele Eigenschaften von Sobolevräumen hängen von der Geometrie von Ω ab.

Definition. Seien $x, x' \in \mathbb{R}^n$ und $r, r' > 0$ mit $x \notin B_{r'}(x')$. Dann heißt

$$C := B_r(x) \cap \{x + \lambda(x - y) : y \in B_{r'}(x'), \lambda > 0\}$$

endlicher Kegel in $\mathbb{R}^n$ mit Spitze x .

12.1 Lemma. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(a) C ist ein endlicher Kegel mit Spitze x .

(b) Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ein $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und ein $r > 0$, sodass

$$C = B_r(x) \cap \{x + y : y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \angle(x, v) \in [0, \alpha)\}$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) Setze $v := x' - x$ und $\alpha := \sup\{\angle(x - y, v) : y \in B_{r'}(x')\}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Setze $x' := x + v$, $r' := \|v\| \sin \alpha$. □

Definition. Ω erfüllt die Kegelbedingung genau dann, wenn es einen endlichen Kegel $C \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Spitze 0 gibt, sodass für alle $x \in \Omega$ ein endlicher Kegel $C_x \subseteq \Omega$ existiert, der kongruent zu C ist, d.h. durch Translation, Drehung und Spiegelung in C überführbar ist.

Beispiele. (a) $\Omega := ((-1, 1) \setminus \{0\}) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ erfüllt die Kegelbedingung.

(b) $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, 0 < y < x^\alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$ erfüllt die Kegelbedingung nicht.

Definition. Ω erfüllt die starke lokale Lipschitz-Bedingung, falls es ein $\delta > 0$, ein $L \geq 0$, ein $N \in \mathbb{N}$ und eine lokal endliche offene Überdeckung $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von $\partial\Omega$ und $f_j : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, gibt, sodass

(i) Für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $|A| \geq N + 1$ gilt $\bigcap_{j \in A} U_j = \emptyset$.

(ii) Für alle $x \in \partial\Omega$ existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $B(x, \delta) \subseteq U_j$.

(iii) Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist f_j Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L .

(iv) Für alle $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein kartesisches Koordinatensystem $(\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,n})$, sodass

$$\Omega \cap U_j = \left\{ \xi_j \in \mathbb{R}^n : f_j(\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,n-1}) > \xi_{j,n} \right\} \cap U_j$$

Bemerkung. Ist Ω beschränkt, dann ist die starke lokale Lipschitz-Bedingung äquivalent dazu, dass Ω einen Lipschitz-Rand hat, siehe unten.

Bemerkung. Die starke lokale Lipschitz-Bedingung impliziert, dass Ω nur auf einer Seite des Randes liegt. Die Kegelbedingung erzwingt das nicht.

12.2 Lemma. Die starke lokale Lipschitzbedingung impliziert die Kegelbedingung.

Definition. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Sei $W \subseteq \partial\Omega$ offen in $\partial\Omega$ (als metrischem Raum). Dann heißt W ein C^k -Graph (bzw. Lipschitz-Graph), falls es ein kartesisches Koordinatensystem gibt, sodass

$$W' := \{(z_1, \dots, z_{n-1}) : z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \in W\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

offen ist und es $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und eine C^k -Funktion (bzw. eine Lipschitz-Funktion) $g: W' \rightarrow (a, b)$ gibt, sodass $W = \{(y, g(y)) : y \in W'\}$ und für $(y, t) \in W' \times (a, b)$ gilt, dass $(y, t) \in \Omega$ genau dann wenn $y < g(y)$. Wir sagen, dass Ω einen C^k -Rand (Lipschitzrand) besitzt, falls für alle $z \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $W \subseteq \partial\Omega$ von z existiert, sodass W ein C^k -Graph (Lipschitz-Graph) ist.

13 Der Sobolev'sche Einbettungssatz

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

13.1 Satz (Sobolev'scher Einbettungssatz, Teil I). *Angenommen, Ω erfülle die Kegelbedingung. Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$ und $u \in W_p^m(\Omega)$.*

- (a) *Sei $mp < n$. Für alle $q \in [p, \frac{np}{n-mp}]$ ist dann $u \in L^q(\Omega)$ und es gibt $C > 0$, sodass $\|u\|_q \leq C\|u\|_{m,p}$ für alle $u \in W_p^m(\Omega)$.*
- (b) *Sei $mp = n$. Dann gilt für alle $q \in [p, \infty)$, dass $u \in L^q(\Omega)$ ist und es gibt ein $C > 0$, sodass $\|u\|_q \leq C\|u\|_{m,p}$ für alle $u \in W_p^m(\Omega)$. Ist $p = 1$, so ist $u \in C_b(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ und es gibt ein $C > 0$, sodass $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{m,p}$ für alle $u \in W_p^m(\Omega)$.*
- (c) *Sei $mp > n$. Dann ist $u \in C_b(\Omega)$ und es gibt $C > 0$, sodass $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{m,p}$.*

Bemerkung. Ist $u \in W_p^{m+j}(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}_0$, dann ist $u \in W_j^q(\Omega)$ bzw. $C_b^j(\Omega)$ und die stetige Einbettung $W_p^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow W_j^q(\Omega)$ bzw. $W_p^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow C_b^j(\Omega)$ gilt.

Wir beweisen (a) und (c) nur im Fall $p > 1$. Für $m = 0$ greift nur (a) und das ist trivial. Wir nehmen daher $m \geq 1$ an.

13.2 Lemma. Ω erfülle die Kegelbedingung mit Winkel $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und Radius $\rho > 0$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $K \geq 0$, sodass für alle $u \in C^\infty(\Omega)$, $x \in \Omega$ und $0 < r \leq \rho$ gilt:

$$|u(x)| \leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} r^{|\alpha|-n} \int_{C_{x,r}} |\partial^\alpha u(y)| dy + \sum_{|\alpha|=m} \int_{C_{x,r}} |\partial^\alpha u(y)| \cdot |x-y|^{m-n} dy \right)$$

wobei $C_{x,r} := \{y \in C_x : |x-y| \leq r\}$ und $C_x \subseteq \Omega$ ist ein Kegel mit Spitze x ist.

Beweis. Sei $u \in C^\infty(\Omega)$, $x \in \Omega$, $0 < r \leq \rho$ und $y \in C_{x,r}$. Für $t \in [0, 1]$ definiere die Funktion $f(t) := u(tx + (1-t)y)$. Die Taylorformel mit Integralrestglied liefert

$$f(1) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(0) + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(m)}(t) dt$$

Also gilt nach Kettenregel $f^{(j)}(t) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} \partial^\alpha u(tx + (1-t)y) \cdot (x-y)^\alpha$. Es folgt

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} |\partial^\alpha u(y)| \cdot |x-y|^{|\alpha|} \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \cdot |\partial^\alpha u(tx + (1-t)y)| dt \cdot |x-y|^m \end{aligned}$$

Sei $c > 0$, sodass $\text{Vol}(C_x) = c\rho^n$. Dann ist $\text{Vol}(C_{x,r}) = cr^n$. Integration über y liefert

$$\begin{aligned} cr^n \cdot |u(x)| &\leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} \frac{1}{\alpha!} \int_{C_{x,r}} |\partial^\alpha u(y)| dy \cdot r^{|\alpha|} \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m}{\alpha!} \underbrace{\int_{C_{x,r}} |x-y|^m \int_0^1 (1-t)^{m-1} |\partial^\alpha u(tx + (1-t)y)| dt dy}_{=: A(x)} \end{aligned}$$

Tonelli und eine Substitution $z = tx + (1-t)y$ liefern nun

$$\begin{aligned}
A(x) &= \int_0^1 \int_{C_{x,r}} |x-y|^m \cdot |\partial^\alpha u(tx + (1-t)y)| \, dy \cdot (1-t)^{m-1} \, dt \\
&= \int_0^1 \int_{C_{x,(1-t)r}} |x-z|^m (1-t)^{-m} |\partial^\alpha u(z)| \cdot (1-t)^{-n} \, dz \cdot (1-t)^{m-1} \, dt \\
&= \int_0^1 (1-t)^{-n-1} \int_{C_{x,(1-t)r}} |x-z|^m \cdot |\partial^\alpha u(z)| \, dz \, dt \\
&= \int_{C_{x,r}} |x-z|^m \cdot |\partial^\alpha u(z)| \int_0^{1-\frac{|x-z|}{r}} (1-t)^{-n-1} \, dt \, dz
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\frac{|x-z|}{r}} (1-t)^{-n-1} \, dt &= \frac{1}{n} (1-t)^{-n} \Big|_0^{1-\frac{|x-z|}{r}} = \frac{1}{n} \left(\frac{|x-z|}{r} \right)^{-n} - \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{n} r^n |x-z|^{-n}
\end{aligned}$$

□

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $\omega_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega_m(x) = |x|^{m-n}$.

13.3 Lemma. Sei $p \in [1, \infty)$. Dann gibt es ein $K \geq 0$, sodass für alle $r > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $v \in L^p(\mathbb{R})$ gilt: $(\mathbb{1}_{B_r(0)} \omega_n) * |v| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|(\mathbb{1}_{B_r(0)} \omega_n) * |v|\|_p \leq K r^m \|v\|_p$.

Beweis. Für $p > 1$, $s > \frac{n}{p} - m$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt nach Hölder

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{B_r(0)} \omega_m * |v|(x) &= \int_{B_r(x)} |x-y|^{s+m-n} \cdot |x-y|^{-s} |v(y)| \, dy \\
&\leq \left(\int_{B_r(x)} |x-y|^{(s+m-n)p'} \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{B_r(x)} |x-y|^{-sp} \cdot |v(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} |x-y|^{(s+m-n)p'} \, dy &= \sigma_{n-1} \int_0^r \rho^{(s+m-n)p'} \rho^{n-1} \, d\rho \\
&= \frac{\sigma_{n-1}}{(s+m-n)p' + n} r^{(s+m-n)p' + n} = \frac{\sigma_{n-1}}{\left(s+m-\frac{n}{p}\right)p'} r^{\left(s+m-\frac{n}{p}\right)p'}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbb{1}_{B_r(0)} * \omega_n * |v|(x) \leq K r^{(s+m-\frac{n}{p})} \left(\int_{B_r(x)} |x-y|^{-sp} |v(y)|^p \, dy \right)^{1/p}$$

Für $p = 1$ und $s \geq \frac{n}{p} - m$ ist die Ungleichung auch wahr, klar. Also ist in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\int |\mathbb{1}_{B_r(0)} \omega_n * |v|(x)|^p \, dx &\leq K^p r^{(s+m-\frac{n}{p})p} \int \int_{B_r(x)} |x-y|^{-sp} |v(y)|^p \, dy \, dx \\
&= K^p r^{(s+m-\frac{n}{p})p} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^r \int_{S^{n-1}} \rho^{-sp} |v(x-\rho\eta)|^p \rho^{n-1} \, dS(\eta) \, d\rho \, dx \\
&= K^p r^{(s+m-\frac{n}{p})p} \int_0^r \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{-sp+n-1} |v(x-s\eta)|^p \, dx \, dS(\eta) \, d\rho \\
&= K^p r^{(s+m-\frac{n}{p})p} \frac{\sigma_{n-1}}{-sp+n} r^{-sp+n} \cdot \|v\|_p^p
\end{aligned}$$

falls $-sp+n > 0$.

□

Definition. Für $u: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ messbar und $p \in [1, \infty)$ definieren wir

$$[u]_p := \left(\sup_{t>0} t^p \lambda^n(\{x \in \Omega : |u(x)| > t\}) \right)^{1/p}$$

und $L_{\text{weak}}^p(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{K} : u \text{ messbar}, [u]_p < \infty\}$ modulo fast überall geltender Gleichheit.

$L_{\text{weak}}^p(\Omega)$ ist ein topologischer Vektorraum.

13.4 Satz (Marcinkiewicz Interpolationssatz). Seien $1 \leq p_1 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq p_2 \leq q_2 \leq \infty$ und $q_1 < q_2$, $\theta \in (0, 1)$ und

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}$$

Sei $F: L^{p_1}(\Omega) + L^{p_2}(\Omega) \rightarrow L^0(\Omega)$ sublinear¹. Es gebe $K_1, K_2 \geq 0$ mit

$$\begin{cases} [F(u)]_{q_j} \leq K_j \cdot \|u\|_{p_j} & q_2 < \infty \\ \|F(u)\|_\infty \leq K_2 \cdot \|u\|_{p_2} & q_2 = \infty \end{cases}$$

für alle $u \in L^{p_j}(\Omega)$, $j \in \{1, 2\}$ bzw. $u \in L^{p_2}(\Omega)$. Dann gibt es $K \geq 0$, sodass für alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt:

$$\|F(u)\|_q \leq K \|u\|_p$$

13.5 Lemma. Sei $p \in (1, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $mp < n$, $p^* = \frac{np}{n-mp}$. Dann gibt es ein $K \geq 0$, sodass für alle $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\omega_m * |v| \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\mathbb{1}_{B_1(0)} * |v|\|_{p^*} \leq \|(\mathbb{1}_{B_1(0)} \omega_m) * |v|\|_{p^*} \leq \|\omega_m * |v|\|_{p^*} \leq K \|v\|_p$$

Beweis. Da $\mathbb{1}_{B_1(0)} \leq \mathbb{1}_{B_1(0)} \omega_m$ gilt die erste Ungleichung. Da $\mathbb{1}_{B_1(0)} \omega_m \leq \omega_m$ gilt, folgt die zweite Ungleichung. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ gilt nach Hölder

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)^c} |v(y)| \cdot |x-y|^{m-n} dy &\leq \|v\|_p \cdot \left(\int_{B_r(x)^c} |x-y|^{(m-n)p'} dy \right)^{1/p'} \\ &= \|v\|_p \cdot \sigma_{n-1}^{1/p'} \cdot \left(\int_r^\infty \rho^{(m-n)p'} \rho^{n-1} d\rho \right)^{1/p'} \\ &= \|v\|_p \cdot \sigma_{n-1}^{1/p'} \cdot \left(\frac{1}{(m-n)p' + n} \cdot \rho^{(m-n)p' + n} \right)^{1/p'} \\ &= K \cdot r^{(m-n) + \frac{n}{p'}} \cdot \|v\|_p = K \cdot r^{m-n/p} \cdot \|v\|_p \end{aligned}$$

Es ist

$$(m-n)p' + n = \frac{mp}{p-1} + n \left(1 - \frac{p}{p-1} \right) = \frac{mp-n}{p-1} < 0$$

Sei $t > 0$. Wähle $r > 0$, sodass $K r^{m-n/p} \|v\|_p = \frac{t}{2}$. Wenn

$$\omega_m * |v|(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)| \cdot |x-y|^{m-n} dy > t$$

¹d.h. positiv homogen ($F(\alpha u) = \alpha F(u)$ für $\alpha > 0$) und subadditiv, $F(u+v) \leq F(u) + F(v)$.

dann gilt auch

$$(\mathbb{1}_{B_r(x)}\omega_m) * |v|(x) = \int_{B_r(x)} |v(y)| \cdot |x - y|^{m-n} dy > \frac{t}{2}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \lambda^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \omega_m * |v|(x) > t\}\right) &\leq \lambda^n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : (\mathbb{1}_{B_r(x)}\omega_m) * |v|(x) > \frac{t}{2}\right\}\right) \\ &= \lambda^n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{2}{t}(\mathbb{1}_{B_r(0)}\omega_m) * |v|(x)\right)^p > 1\right\}\right) \\ &\leq \int_{\{\dots\}} \left(\frac{2}{t}(\mathbb{1}_{B_r(0)}\omega_m) * |v|(x)\right)^p dx \\ &\leq \left(\frac{2}{t}\right)^p \cdot \|(\mathbb{1}_{B_r(0)}\omega_m) * |v|\|_p^p \leq \left(\frac{2}{t}\right)^p \cdot \tilde{K}^p \cdot r^{mp} \cdot \|v\|_p^p \end{aligned}$$

nach Lemma 13.3. Wegen

$$\left(\frac{2}{t}\right)^p = \left(\frac{r^{n/p-m}}{K\|v\|_p}\right)^p = \frac{r^{n-mp}}{K^p\|v\|_p^p}$$

folgt weiter

$$\lambda^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \omega_m * |v|(x) > t\}\right) \leq K_1 r^n$$

Nach der Wahl von t ist

$$r^n = \left(\frac{2K\|v\|_p}{t}\right)^{p^*} = \left(r^{\frac{n}{p}-m}\right)^{p^*}$$

denn

$$\left(\frac{n}{p} - m\right)p^* = \left(\frac{n}{p} - m\right) \frac{np}{n-mp} = \left(\frac{n-mp}{p}\right) \frac{np}{n-mp} = n$$

Es folgt

$$\lambda^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \omega_m * |v|(x) > t\}\right) \leq K_1 \left(\frac{2K}{t}\|v\|_p\right)^{p^*}$$

Also ist $I: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{\text{weak}}^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, $v \mapsto \omega_m * |v|$ beschränkt. Es gibt $p_1, p_2 > 1$ mit $p_1 < p < p_2$ mit $mp_1, mp_2 < n$, $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = \frac{1-\theta}{p_1} - (1-\theta)\frac{m}{n} + \frac{\theta}{p_2} - \theta\frac{m}{n} = \frac{1-\theta}{p_1^*} + \frac{\theta}{p_2^*}$$

Marcinkiewicz liefert, dass $I: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist. $\square$

Beweis von Satz 13.1. (a) Wir beweisen (a) nur für $p > 1$. Sei $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ und setze u und alle Ableitungen durch Null fort. Nach Lemma 13.2 ist für $r = \min\{\rho, 1\}$ (wobei ρ die Kegelhöhe aus der Kegelbedingung ist) und alle $x \in \Omega$:

$$|u(x)| \leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} \mathbb{1}_{B_r(0)} * |\partial^\alpha u|(x) + \sum_{|\alpha|=m} \mathbb{1}_{B_r(0)}\omega_m * |\partial^\alpha u|(x) \right) \quad (13.1)$$

Es gibt ein $\theta \in [0, 1]$ mit $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Es ist nach Hölder und da $\omega_n \geq 1$ auf $B_r(0)$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u(x)|^q dx &= \int_{\Omega} |u(x)|^{\theta q} \cdot |u(x)|^{(1-\theta)q} dx \\
&\leq \underbrace{\left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{\theta q}{p}}}_{= \|u\|_p^{\theta q}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{(1-\theta)q}{p^*}} \\
&\leq \|u\|_p^{\theta q} \cdot \tilde{K} \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\omega_m * |\partial^\alpha u|\|_{p^*} \right)^{(1-\theta)q} \\
&= \|u\|_p^{\theta q} \cdot C \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p \right)^{(1-\theta)q} \leq C \cdot \|u\|_{m,p}^q
\end{aligned}$$

- (b) Der Fall $p = 1$ ist Lemma 13.2 mit $m = n$. Sei $p > 1$. Es gibt $1 < p_1 < p < p_2$ und $\theta \in (0, 1)$, sodass

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \qquad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{p_1}$$

wobei wir $q_2 = \infty$ wählen. Wie in Beweis von Lemma 13.5 zeigt man, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned}
L^{p_1}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \\
v &\longmapsto \mathbb{1}_{B_1(0)} * |v| \\
v &\longmapsto \mathbb{1}_{B_1(0)} \omega_m * |v|
\end{aligned}$$

beschränkt sind. Damit sind sie auch beschränkt von $L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ nach $L_{\text{weak}}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$. Wie im Beweis von (c) ist

$$\begin{aligned}
L^{p_2}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \\
v &\longmapsto \mathbb{1}_{B_1(0)} * |v| \\
v &\longmapsto \mathbb{1}_{B_1(0)} \omega_m * |v|
\end{aligned}$$

beschränkt. Marcinkiewicz liefert die Beschränktheit von $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach $L^q(\mathbb{R}^n)$. Dann nutzen wir (13.1), und wenden die Beschränktheit auf die Ableitungen an.

- (c) Wir beweisen (c) nur für $p > 1$. Sei $u \in W_p^m(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Wir zeigen, dass es ein $K \geq 0$ gibt, sodass $|u(x)| \leq K \|u\|_{m,p}$ für $x \in \Omega$. Sei $x \in \Omega$. Lemma 13.2 mit $r = \rho$ liefert mit Hölder

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} \text{Vol}(C_{x,\rho})^{1/p'} \cdot \rho^{|\alpha|-n} \cdot \|\partial^\alpha u\|_{L^p(C_{x,\rho})} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(C_{x,\rho})} \cdot \left(\int_{C_{x,\rho}} |x-y|^{(m-n)p'} dy \right)^{1/p'} \right)
\end{aligned}$$

Da $(m-n)p' = (m-n)\frac{p}{p-1} = \frac{mp-np}{p-1} > \frac{n-np}{p-1} > -n$ gilt, ist das Integral endlich. $\square$

Definition. Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0, 1]$ definieren wir den Hölderraum $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ der Funktionen $u \in C^m(\overline{\Omega})$, sodass

$$[u]_\alpha := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = m$.

$C^{m,\alpha}$ ist ein Banachraum mittels der Summe $\|\cdot\|_m + [\cdot]_\alpha$.

13.6 Satz (Sobolev'scher Einbettungssatz, Teil 2). Ω erfülle die starke lokale Lipschitz-Bedingung und sei $u \in W_p^m(\Omega)$. Dann gilt:

(a) Sei $m > n > (m-1)p$ und $0 < \alpha < m - \frac{n}{p}$. Dann ist $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ und es gilt die stetige Einbettung $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(b) Sei $n = (m-1)p$ und $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ und $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(c) Sei $p = 1$, $n = m-1$ und $\alpha \in (0, 1]$. Dann ist $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ und $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

13.7 Satz (Sobolev'scher Einbettungssatz, Teil 3). Die Aussagen in Satz 13.1 und 13.6 gelten für alle $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, falls $u \in W_{p,0}^m(\Omega)$.

Beweis. Die Abbildung $E: W_{p,0}^m(\Omega) \longrightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n)$

$$Eu := \begin{cases} u & \text{auf } \Omega \\ 0 & \text{auf } \Omega^c \end{cases}$$

ist isometrisch. Dann wenden wir die jeweiligen Sätze auf $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ an. □

14 Kompakte Einbettungen

14.1 Satz (Kolmogorov Kompaktheitskriterium). Seien $p \in [1, \infty)$, $K \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

(i) K ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in K} \|f\|_K < \infty$.

(ii) Es gilt

$$\sup\{\|f - f(\bullet - y)\|_p : f \in K\} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

(iii) Es gibt ein $R > 0$ mit $\text{supp } f \subseteq \overline{B}_R(0)$ für alle $f \in K$.

Dann ist K relativ kompakt in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung. Ist (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, dann ist M kompakt genau dann wenn M präkompakt ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $F \subseteq M$ endlich mit $M = \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x)$.

14.2 Lemma. Sei $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\rho \geq 0$ und $\int \rho = 1$. Sei weiter $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\rho * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|\rho * f - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\bullet - y) - f\|_p \cdot \rho(y) \, dy$$

Beweis. Es ist

$$|\rho * f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y) \cdot |f(y)| \, dy \leq \underbrace{\left(\int \rho(x - y) \, dy \right)^{1/p'}}_{=1} \left(\int \rho(x - y) |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p}$$

Damit folgt

$$\int |\rho * f(x)|^p \, dx \leq \int \int \rho(x - y) |f(y)|^p \, dy \, dx = \int \int \rho(x - y) \, dx |f(y)|^p \, dy = \|f\|_p^p$$

Für die finale Abschätzung schreibt man

$$\rho * f(x) - f(x) = \int (f(x - y) - f(x)) \rho(y) \, dy$$

und geht wie oben vor. □

14.3 Satz. Sei $p \in [1, \infty)$, $R > 0$ und $\rho \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\rho \geq 0$ und $\text{supp } \rho \subseteq B_1(0)$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{R}^n) &\supseteq L^p(B_R(0)) \longrightarrow C(B_{R+1}(0)) \\ f &\longmapsto \rho * f \end{aligned}$$

kompakt.

Beweis. Ohne Einschränkung ist $p = 1$. Zu zeigen ist, dass

$$\{\rho * f : f \in L^1(B_R(0)), \|f\|_1 \leq 1\}$$

relativ kompakt in $C(B_{R+1}(0))$ ist, also beschränkt und gleichgradig stetig (Arzelà-Ascoli). Zur Beschränktheit ist $|\rho * f(x)| \leq \int \rho(x-y)|f(y)| dy \leq \|\rho\|_\infty \cdot \|f\|_1$. Zur gleichgradigen Stetigkeit ist

$$\begin{aligned} |\rho * f(x) - \rho * f(y)| &\leq \int |\rho(x-z) - \rho(y-z)| \cdot |f(z)| dz \\ &\leq \|f\|_1 \cdot \sup \left\{ |\rho(x-z) - \rho(y-z)| : z \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &\leq \sup \{ |\rho(z) - \rho(z')| : |z - z'| = |x - y| \} \xrightarrow{|x-y| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

da ρ gleichmäßig stetig ist. $\square$

14.4 Lemma. Sei M eine Menge, X ein Banachraum und $\varphi_n: M \rightarrow X$ eine Folge, sodass $\varphi_n(M)$ präkompakt ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gebe ein $\varphi: M \rightarrow X$ mit $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ gleichmäßig. Dann ist $\varphi(M)$ präkompakt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\|\varphi_n(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in M$. Es gibt $F \subseteq M$ endlich, sodass $\varphi_n(M) \subseteq \bigcup_{x \in F} B_\varepsilon(x)$. Damit ist $\varphi(M) \subseteq \bigcup_{x \in F} B_{2\varepsilon}(x)$. $\square$

Beweis von Satz 14.1. Sei $(\rho_k)_k$ in $C_c(\mathbb{R}^n)$ eine δ -Folge. Definiere $\varphi_k: K \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ als $\varphi_k(f) := \rho_k * f$. Dann ist $\varphi_k(K)$ präkompakt in $L^p(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\begin{aligned} L^p(B_R(0)) &\rightarrow C(B_{R+1}(0)) \hookrightarrow L^p(B_{R+1}(0)) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \rho_k * f \end{aligned}$$

ist kompakt nach Satz 14.3. Außerdem ist $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbb{1}$ gleichmäßig, denn sei $f \in K$. Dann ist

$$\|\rho_k * f - f\|_p \leq \int \|f(\bullet - y) - f\|_p \cdot \rho_k(y) dy$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass wann immer $|y| < \delta$ folgt, dass $\|f(\bullet - y) - f\|_p < \varepsilon$ für alle $f \in K$. Es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \delta$, womit $\text{supp } \rho_k \subseteq B_{\frac{1}{k}}(0) \subseteq B_\delta(0)$. Damit ist $\|\rho_k * f - f\|_p \leq \varepsilon$. Wende Lemma 14.4 an. $\square$

14.5 Satz (Rellich-Kondrachov). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit Kegelbedingung und $\Omega_0 \subseteq \Omega$ offen und beschränkt. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$.

(a) Sei $mp < n$ und $q \in [1, \frac{np}{n-mp})$. Dann ist $W_p^m(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega_0)$ kompakt.

(b) Sei $mp = n$ und $q \in [1, \infty)$. Dann ist $W_p^m(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega_0)$ kompakt.

(c) Sei $mp > n$, $q \in [1, \infty)$. Dann ist $W_p^m(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega_0)$ und $W_p^m(\Omega) \subset\subset C_b(\Omega_0)$.

Bemerkung. (a) Ist Ω beschränkt, so kann $\Omega_0 = \Omega$ gewählt werden.

(b) Für $j \in \mathbb{N}$ ist auch $W_m^{m+j}(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega_0)$ bzw. $C_b^j(\Omega_0)$ kompakt.

14.6 Lemma. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega_0 \subseteq \Omega$ offen. Sei $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und $1 \leq q_1 \leq q < q_0$ mit $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^{q_0}(\Omega_0)$ stetig und $W_p^m(\Omega) \subset\subset L^{q_1}(\Omega_0)$ kompakt. Dann ist die Einbettung $W_p^m(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega_0)$ kompakt.

Beweis. Sei $s := \frac{q_1(q_0-q)}{q(q_0-q_1)}$ und $t := \frac{q_0(q-q_1)}{q(q_0-q_1)}$. Dann ist $0 \leq s, t \leq 1$, $s \neq 0$ und $s + t = 1$. Weiter ist $\frac{q_1}{s}, \frac{q_0}{t} \geq 1$ und $\frac{s}{q_1} + \frac{t}{q_0} = \frac{1}{q}$. Sei $u \in W_p^m(\Omega)$. Hölder liefert

$$\|u\|_{L^p(\Omega_0)} = \| |u|^s \cdot |u|^t \|_{L^q(\Omega_0)} \leq \| |u|^s \|_{L^{\frac{q_1}{s}}(\Omega_0)} \cdot \| |u|^t \|_{L^{\frac{q_0}{t}}(\Omega_0)} = \|u\|_{L^{q_1}(\Omega_0)}^s \cdot \|u\|_{L^{q_0}(\Omega_0)}^t$$

Es gibt $C \geq 0$, sodass $\|u\|_{L^{q_0}(\Omega_0)} \leq C\|u\|_{m,p}$. Damit ist

$$\|u\|_{L^q(\Omega_0)} \leq C\|u\|_{L^{q_1}(\Omega_0)}^s \cdot \|u\|_{m,p}^t$$

Sei $(u_k)_k$ eine beschränkte Folge in $W_p^m(\Omega)$. Also gibt es eine Teilfolge $(u_k)_k$, sodass $(u_k)_k$ konvergent in $L^{q_1}(\Omega_0)$, insbesondere ist $(u_k)_k$ eine Cauchy-Folge in $L^{q_1}(\Omega_0)$. Die Abschätzung liefert, dass (u_k) eine Cauchy-Folge in $L^q(\Omega_0)$ ist. $\square$

Beweis von Satz 14.5 (a), (b). Sei

$$q_0 := \begin{cases} \frac{np}{n-mp} & mp < n \\ q+1 & mp = n \end{cases}$$

und $q_1 := 1$. Satz 13.1 liefert $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^{q_0}(\Omega)$ stetig, also auch $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow L^{q_0}(\Omega_0)$. Nach Lemma 14.6 genügt es zu zeigen, dass $W_p^m(\Omega) \subset \subset L^1(\Omega_0)$ kompakt ist. Sei

$$K := \{u \in W_p^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} \leq 1\}$$

Da Ω_0 beschränkt ist, ist K beschränkt in $L^1(\Omega_0)$. Für $u \in K$ sei

$$\tilde{u} := \begin{cases} u & \text{auf } \Omega_0 \\ 0 & \text{auf } \Omega_0^c \end{cases}$$

und $\tilde{K} := \{\tilde{u} : u \in K\} \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\tilde{K}$ beschränkt, was (i) in 14.1 zeigt. Es gibt ein $R > 0$ mit $\Omega_0 \subseteq \overline{B}_R(0)$. Damit ist $\text{supp } \tilde{u} \subseteq \overline{B}_R(0)$ für alle $\tilde{u} \in \tilde{K}$, sodass (ii) in 14.1 gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei

$$\Omega_j := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > 2/j\}$$

Dann ist mit Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_j} |\tilde{u}(x)| \, dx &= \int_{\Omega_0 \setminus \Omega_j} |u(x)| \, dx \leq \left(\int_{\Omega_0 \setminus \Omega_j} |u(x)|^{q_0} \, dx \right)^{1/q_0} \lambda^n(\Omega_0 \setminus \Omega_j)^{1/q_0'} \\ &\leq C\|u\|_{m,p} \lambda(\Omega_0 \setminus \Omega_j)^{1/q_0'} \end{aligned}$$

Es gibt $j \in \mathbb{N}$ mit $C\lambda(\Omega_0 \setminus \Omega_j)^{1/q_0'} < \varepsilon$. Damit ist für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| \leq \frac{1}{j}$:

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_j} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \, dx \leq 2C\|u\|_{m,p} \lambda^n(\Omega_0 \setminus \Omega_j)^{1/q_0'} \leq 2\varepsilon$$

Sei $x \in \Omega_j$ und $t \in [0, 1]$. Dann ist $x + th \in \Omega_{2j}$ und für $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} |u(x+h) - u(x)| \, dx &= \int_{\Omega_j} \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} u(x+th) \right| \, dt \, dx \\ &\leq |h| \int_0^1 \int_{\Omega_j} |\nabla u(x+th)| \, dx \, dt \leq |h| \int_{\Omega_{2j}} |\nabla u(y)| \, dy \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \, dx &\leq |h| \int_{\Omega_0} |\nabla u(y)| \, dy \leq |h| \cdot C \cdot \left(\int_{\Omega_0} |\nabla u(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \\ &\leq |h| \cdot C \cdot \|u\|_{m,p} \end{aligned}$$

Satz 11.3 liefert die Abschätzung für $u \in W_p^m(\Omega)$. Für $|h| \leq \min\{\frac{\varepsilon}{C}, \frac{1}{j}\}$ folgt

$$\int_{\Omega_j} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \, dx \leq \varepsilon$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \, dx &= \int_{\Omega \setminus \Omega_j} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \, dx + \int_{\Omega_j} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| \, dx \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

womit auch (iii) in 14.1 gilt. Aus Satz 14.1 erhalten wir, dass $\tilde{K}$ relativ kompakt in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Damit ist K relativ kompakt in $L^1(\Omega_0)$. $\square$

14.7 Satz. Die Aussagen von Satz 14.5 bleiben wahr für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in W_{p,0}^m(\Omega)$.

Beweis. Die Fortsetzung $E: W_{p,0}^m(\Omega) \longrightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n)$ ist isometrisch. Dann wenden wir Satz 14.5 für $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ an. $\square$

15 Der Spur-Operator

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

15.1 Satz. Sei Ω mit stetigem Rand und $p \in [1, \infty)$. Dann ist

$$\check{C}^\infty(\Omega) := \{\varphi|_\Omega : \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

dicht in $W_p^1(\Omega)$.

Beweis. (i) Sei $W \subseteq \partial\Omega$ ein C^0 -graph von $g: W' \rightarrow (a, b)$. Sei $u \in W_p^1(\Omega)$ mit $\text{supp } u \subseteq W' \times (a, b)$ und setze u durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fort. Für $\tau > 0$ sei $u_\tau(x) = u(x', x_n - \tau)$ für $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $u_\tau|_\Omega \in W_p^1(\Omega)$ für kleine τ und $u_\tau|_\Omega \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} u$ in $W_p^1(\Omega)$. Für $\tau > 0$ ist $u_\tau \in W_p^1(\Omega + \tau e_n)$. Sei $(\rho_k)_k$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine δ -Folge. Dann ist $\rho_k * u_\tau \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\rho_k * u_\tau|_\Omega \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_\tau|_\Omega$ in $W_p^1(\Omega)$. Wir schließen, dass es für alle C^0 -Graphen $W \subseteq \partial\Omega$ ein $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen gibt, sodass $W = U \cap \partial\Omega$ und dass alle $u \in W_p^1(\Omega)$ mit $\text{supp } u \subseteq U$ durch Elemente aus $\check{C}^\infty(\Omega)$ approximiert werden können.

(ii) Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es $W_1, \dots, W_m \subseteq \partial\Omega$, sodass $\bigcup_{j=1}^m W_j \supseteq \partial\Omega$ und W_j ist ein C^0 -Graph für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Sei $U_j \subseteq \mathbb{R}^n$ offen wie in (i) für $j = 1, \dots, m$ und setze $U_0 := \Omega$. Dann ist $(U_k)_{k=0}^m$ eine offene Überdeckung von $\bar{\Omega}$. Es gibt eine Zerlegung der Eins $(\varphi_k)_{k=0}^m$ von $\bar{\Omega}$ in $C_c^\infty(\Omega)$, $\sum_{k=0}^m \varphi_k = 1$ auf $\bar{\Omega}$, $\text{supp } \varphi_k \subseteq U_k$. Sei $u \in W_p^1(\Omega)$. Dann ist $\varphi_0 u \in W_{p,0}^1(\Omega)$, kann also durch $C_c^\infty(\Omega)$ -Funktionen approximiert werden. Mit (i) kann $\varphi_k u$ durch $\check{C}^\infty(\Omega)$ -Funktionen approximiert werden für alle $k = 1, \dots, m$. $\square$

Bemerkung. Sei Ω mit C^k -Rand (Lipschitz-Rand). Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $W_1, \dots, W_m \subseteq \partial\Omega$ mit $\bigcup_{j=1}^m W_j \supseteq \partial\Omega$ und W_j ist ein C^k -Graph (Lipschitz-Graph). Es gibt $U_j \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $W_j = U_j \cap \partial\Omega$ und $g_j: W_j' \rightarrow (a, b)$ ist C^k (Lipschitz). Weiter gibt es eine Zerlegung der Eins $(\varphi_k)_{k=1}^m$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum_k \varphi_k = 1$ auf $\partial\Omega$ und $\text{supp } \varphi_k \subseteq U_k$.

Definition. Sei Ω mit Lipschitz-Rand. Sei $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{K}$, dann heißt f messbar bzw. integrierbar, falls für $j = 1, \dots, m$ die Abbildung

$$\begin{aligned} W_j' &\rightarrow \mathbb{K} \\ y' &\mapsto (\varphi_j f)(y', g_j(y')) \end{aligned}$$

messbar bzw. integrierbar ist. Dann ist

$$\int_{\partial\Omega} f \, d\sigma := \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega} \varphi_j f \, d\sigma$$

sobei wir für $h: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\text{supp } h \subseteq W_j'$ integrierbar

$$\int_{\partial\Omega} h \, d\sigma := \int_{W_j'} h(y', g_j(y')) \cdot \sqrt{1 + |\nabla g_j(y')|^2} \, dy'$$

definieren.

Bemerkung. g_j Lipschitz impliziert, dass g_j fast überall differenzierbar ist und $\nabla g_j \in L^\infty$ (Beweis: lang).

Definition. Sei Ω mit Lipschitz-Rand und sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist

$$L^p(\partial\Omega) := \left\{ f: \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar, } \int_{\partial\Omega} |f|^p d\sigma < \infty \right\}$$

und

$$L^\infty(\partial\Omega) := \{ f: \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ messbar, } \text{ess sup } |f| < \infty \}$$

mit der üblichen Identifikation. Die Normen sind entsprechend.

15.2 Proposition. Sei Ω mit Lipschitz-Rand. Dann gibt es ein eindeutiges $\nu \in L^\infty(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$, sodass

(i) $|\nu| = 1$ fast überall.

(ii) Für $j = 1, \dots, m$ sei $\psi_j: W'_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi_j(y') := (y', g_j(y'))$. Dann ist

$$\nu(\bullet, g_j(\bullet)) \cdot \partial_k \psi_j = 0$$

auf W'_j für $k = 1, \dots, n-1$.

(iii) Für $j = 1, \dots, m$ gilt: Ist g_j in $z' \in W'_j$ differenzierbar, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$(z', g_j(z')) + t\nu(z', g_j(z')) \notin \overline{\Omega}$$

für $0 < t < \varepsilon$.

Definition. ν aus Proposition 15.2 heißt äußere Einheitsnormale.

Bemerkung. Für $j = 1, \dots, m$ ist

$$\nu(\bullet, g_j(\bullet)) = \frac{(-\nabla g_j, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla g_j|^2}}$$

fast überall auf W'_j .

Bis hierher durchgearbeitet!